

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang
1977/1978
no 1
aug./sept.

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 32,–. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: 1/1 pag. *f* 275,—, 1/2 pag. *f* 150,— en 1/4 pag. *f* 85,—.

De gebeurtenissen zijn immers onafhankelijk. Pas op met de redactie der vraagstukken IOWO. Een onjuist advies van Pascal aan Chevalier de Méré

Drs. W. P. VAN DEN BRINK

1 *Inleiding*
Bij het oplossen van problemen uit de elementaire kansrekening worden een aantal fouten steeds opnieuw en met grote hardnekkigheid gemaakt. De naar mijn ervaring frequentst gemaakte fout ontstaat door verwarring der begrippen onafhankelijkheid en disjunctie van gebeurtenissen. Dit zal duidelijk gemaakt worden aan een tweetal voorbeelden waaronder de welbekende paradox van Chevalier de Méré. Enige didactische conclusies zullen hieruit volgen.
Naar aanleiding van de onhandige formulering van de paradox van Chevalier de Méré in het IOWO boek [5] zal vervolgens het belang van een zorgvuldige redactie der vraagstukken geïllustreerd worden aan een andere opgave uit [5].
Chevalier de Méré heeft naam gemaakt met een tweetal problemen die hij aan Pascal heeft voorgelegd. Aangezien het tweede probleem ook aanleiding geeft tot een aantal didactische opmerkingen, wordt dit, tot slot, eveneens behandeld en het advies van Pascal aan Chevalier de Méré verbeterd.

2 *De gebeurtenissen zijn immers onafhankelijk*
Eén van de door de leerlingen veel gemaakte fouten heeft te maken met een onjuist gebruik van de regel:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (1)$$

Helaas geldt deze regel slechts als $A \cap B = \emptyset$.
In het boek van Noether [1] treffen we op pagina 34 de volgende opgave aan: 'There are 440 taxis in a city, numbered from 1 to 440. A random sample of five taxis is observed. Show that the probability that taxi #440 appears at least once in the sample is .011.'
Vrijwel zonder uitzondering zullen de leerlingen dit probleem als volgt oplossen:
P(1e waargenomen taxi is nr. 440 $\vee$ 2e waargenomen taxi is nr. 440 $\vee$ 3e waargenomen taxi is nr. 440 $\vee$ 4e waargenomen taxi is nr. 440 $\vee$ 5e waargenomen taxi is nr. 440) $= \frac{1}{440}+\frac{1}{440}+\frac{1}{440}+\frac{1}{440}+\frac{1}{440} = \frac{5}{440} = 0{,}011$.
Helaas is deze oplossing fout ook al is de uitkomst althans in drie decimalen, correct. De verschillende gebeurtenissen '1e waargenomen taxi is nr. 440' etc. zijn niet disjunct. Het element (440, 440, 440, 440, 440) uit de uitkomstenruimte

behoort bijvoorbeeld tot alle vijf de gebeurtenissen waarvan hier sprake is. De eenvoudigste correcte oplossing is:
P(taxi 440 zit minstens eenmaal in de steekproef) = 1-P(taxi 440 zit niet in de steekproef) = $1-(\frac{439}{440})^5 = 1-0{,}989 = 0{,}011$.
Natuurlijk is het in vraagstukken van dit type steeds het handigst om op de complementaire gebeurtenis over te gaan. Bij dit vraagstuk zullen toch nog wel enkele leerlingen hun twijfels houden over het fout zijn van de eerste oplossingsmethode. Het antwoord is immers goed. Het is daarom zeker nuttig het vraagstuk ook rechtstreeks, maar nu correct, op te lossen. Hiertoe dient naar analogon van de regel

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B) \qquad (2)$$

de regel

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A \cap B)-\mathrm{P}(A \cap C)+ \\ -\mathrm{P}(B \cap C)+\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \qquad (3)$$

afgeleid te worden (een nuttige opgave voor de leerlingen!).
Analoog hieraan geldt:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B \cup C \cup D \cup E) = {} & \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+ \ldots +\mathrm{P}(E)+ \\ & -\mathrm{P}(A \cap B)-\mathrm{P}(A \cap C)- \ldots -\mathrm{P}(D \cap E)+ \\ & +\mathrm{P}(A \cap B \cap C)+ \ldots +\mathrm{P}(C \cap D \cap E)+ \\ & -\mathrm{P}(A \cap B \cap C \cap D)- \ldots - \\ & -\mathrm{P}(B \cap C \cap D \cap E)+ \\ & +\mathrm{P}(A \cap B \cap C \cap D \cap E). \qquad (4)\end{aligned}$$

Als nu gebeurtenis A staat voor 'de eerste waargenomen taxi is nr. 440', B voor 'de tweede waargenomen taxi is nr. 440' en C, D en E analoog, dan kunnen we de volgende rechtstreekse oplossing voor het vraagstuk geven:

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C \cup D \cup E) = \tfrac{5}{440}-\tbinom{5}{2}(\tfrac{1}{440})^2+\tbinom{5}{3}(\tfrac{1}{440})^3-\tbinom{5}{4}(\tfrac{1}{440})^4+\tbinom{5}{5}(\tfrac{1}{440})^5$$

= 0,0113121007 zoals berekening met een HP35 zakrekenmachine leert.

Voor $1-(\frac{439}{440})^5$ geeft deze machine 0,0113121006.
Voor $\frac{5}{440}$ echter 0,0113636363. Nu is de leerling wel overtuigd dat het antwoord $\frac{5}{440}$ niet correct is, alhoewel het als benadering niet slecht is. Waarschijnlijk zal Noether bij het opstellen van het vraagstuk niet aan het foute antwoord $\frac{5}{440}$ gedacht hebben. Anders zou hij het getal 0,011 waarschijnlijk niet genoemd hebben[1]).
Opmerking: Natuurlijk kan het antwoord rechtstreeks ook als volgt gevonden worden:

[1] Uit dit voorbeeld moge ook blijken dat het gebruik van een zakrekenmachine door de leerlingen vanuit praktisch en didactisch oogpunt zeer gewenst is. Laten we hopen dat op geen enkele school de rekenliniaal nog behandeld en voorgeschreven wordt. Daarmee zou men bij berekening van het bovenstaande de kleine verschillen zeker niet vinden. Voor de zakrekenmachine is geen onderwijs nodig, hij is veel nauwkeuriger en kost weinig meer dan de rekenliniaal. Een iets duurdere uitvoering maakt bovendien de logaritmentafel overbodig.

P(minstens een succes $|p = \frac{1}{440}; n = 5) = \binom{5}{1}\frac{1}{440}(\frac{439}{440})^4 + \binom{5}{2}(\frac{1}{440})^2(\frac{439}{440})^3 +$
$+ \binom{5}{3}(\frac{1}{440})^3(\frac{439}{440})^2 + \binom{5}{4}(\frac{1}{440})^4 \frac{439}{440} + \binom{5}{5}(\frac{1}{440})^5 = 0{,}0113121006$, met dezelfde HP35 berekend. Deze berekeningswijze sluit echter niet aan bij de door de leerling gemaakte fout.

Een ander probleem, waarvan de oplossing dikwijls tot fouten van hetzelfde type leidt, is de paradox van Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, een beroepsgokker uit de 17e eeuw. De kansrekening als onderdeel van de wiskunde vindt zijn oorsprong in een briefwisseling tussen Pascal en Fermat over een tweetal problemen die hun door Chevalier de Méré waren aangeboden.

De Méré was aan de speeltafel op deze problemen gestoten. Een brief van Pascal aan Fermat (zie Chung [3]), gedateerd woensdag 29 juli 1654, bevat de volgende passage:

'de Méré heeft mij verteld dat hij iets bedriegelijks heeft gevonden in de theorie der getallen en wel om de volgende reden:

als men een zes tracht te gooien met één dobbelsteen verhouden de gunstige mogelijkheden zich tot de ongunstige bij vier worpen als 671 staat tot 625.

Als men echter tracht twee zessen met twee dobbelstenen te gooien is de verhouding tussen gunstige en ongunstige mogelijkheden nadelig als men dat in 24 worpen met twee stenen doet. En toch staat 24 tot 36 (het aantal mogelijke uitkomsten bij het werpen met twee stenen) als 4 staat tot 6 (het aantal mogelijke uitkomsten bij het werpen met één steen). Dit maakte hem zeer verontwaardigd en deed hem tegen iedereen zeggen dat de proposities niet consistent zijn en dat de rekenkunde intern tegenstrijdig is. Maar U zult gemakkelijk inzien dat wat ik zeg correct is, aangezien U de principes op de juiste wijze begrijpt'.

Pascal loste het probleem van de Méré op en iedere beginner in de kansrekening zou nu in staat moeten zijn diezelfde oplossing te geven.

P(minstens één zes bij vier worpen met één dobbelsteen) = 1 − P(geen zes bij vier worpen) $= 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0{,}518 > 0{,}5$.

Inderdaad zal het tot winst leiden te wedden op minstens één zes bij vier achtereen volgende worpen met een dobbelsteen.

De Méré's waarneming is buitengewoon goed: $\frac{671}{671+625} = 0{,}518$, hij moet jaren aan de speeltafel gesleten hebben!

P(minstens één dubbelzes bij 24 worpen met twee stenen) $= 1 - (\frac{35}{36})^{24} =$
$= 0{,}491 < 0{,}5$, zodat het tot verlies zal leiden te wedden op minstens een dubbelzes bij 24 worpen met twee stenen.

De Méré verloor dus geheel volgens de wiskundige wetten. Ook het ontdekken van deze kleine ongelijkheid bewijst dat de Méré zeer langdurig en volhardend gespeeld moet hebben. Ditzelfde probleem schijnt overigens reeds eerder door Cardano (1501–1576) opgelost te zijn.

De fout die de Méré maakte en waardoor hij in beide gevallen winst verwachtte, is dat hij ten onrechte lineariteit veronderstelde[2]).

[2] De formulering van de paradox van Chevalier de Méré in het IOWO boek van Nijdam [5] blz. 60 is ongelukkig. 'Een worp met vier dobbelstenen' dient vervangen te worden door 'vier worpen met één dobbelsteen'. Anders gaat het paradoxale, dat gelegen is in 4 : 6 = 24 : 36, verloren.

Ik kan U verzekeren dat vele studenten heden ten dage ook in beide gevallen winst zouden verwachten. En zelfs een veel grotere winst dan de Méré. Ik heb de opgave meerdere malen aan studenten van de subfaculteit psychologie van de Universiteit van Amsterdam, met hoofdrichting methodenleer, gegeven in een herhalingscursus statistiek. Een meerderheid levert dan de volgende oplossing:
P(minstens één zes bij vier worpen met één dobbelsteen) = P(1e worp zes $\vee$ 2e worp zes $\vee$ 3e worp zes $\vee$ 4e worp zes) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

P(minstens één dubbelzes bij 24 worpen met twee stenen) = P(1e worp dubbelzes $\vee$ 2e worp dubbelzes $\vee$ ... $\vee$ 24e worp dubbelzes) = $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\ldots+$ $+\frac{1}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

De studenten maken dezelfde fout als bij de oplossing van het vraagstuk uit Noether. Regelmatig naar de speeltafel gaan, zou hier misschien kunnen helpen. Als men de studenten naar hun argumentatie vraagt voor het gebruik van de regel:
P(minstens één zes) = P(1e worp 6 $\vee$ 2e worp 6 $\vee$ 3e worp 6 $\vee$ 4e worp 6) = $= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ dan zullen ze steevast antwoorden:
'de vier worpen zijn immers onafhankelijk'. Dit onthult de aard van de fout die ze maken in het vraagstuk van Noether en bij de oplossing van het probleem van de Méré. Men haalt als beginner de begrippen *disjunctie* (van belang bij de somregel) en *onafhankelijkheid* (van belang bij de produktregel) door elkaar. Dit is een van de frequentst gemaakte fouten bij het oplossen van vraagstukken uit de kansrekening door beginners.
Ten aanzien van de didaktiek van het onderwijs in de statistiek levert dit in mijn ogen de volgende belangrijke conclusies op:

1 Begin niet met behandeling van regel (1) maar behandel eerst regel (2) en zie (1) als een gevolg van (2) als de gebeurtenissen A en B disjunct zijn. Neem alle vanzelfsprekendheid van regel (1) weg.
2 Besteed veel aandacht aan het verschil tussen disjunctie en onafhankelijkheid. Koppel disjunctie uitdrukkelijk aan de somregel en onafhankelijkheid aan de produktregel. Hierbij helpt het te behandelen dat twee niet lege maar disjuncte gebeurtenissen altijd afhankelijk zijn.
3 Leid met behulp van regel (2) ook regel (3) af. Dan wordt het duidelijk waarom het bij vraagstukken zoals de hier behandelde zo handig is op het complement over te gaan.
4 Behandel de onafhankelijkheid van drie gebeurtenissen A, B en C. Dit eist:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
We willen immers voorkomen dat

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ maar dat bv. $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Wellicht dat de leerlingen nu wat minder ondoordacht met de begrippen disjunctie en onafhankelijkheid zullen omspringen.

3 *Pas op met de redactie der vraagstukken, IOWO*

Dikwijls worden de leerlingen door onzorgvuldige of ondoordachte formulering van de vraagstukken op het verkeerde pad gelokt.
Een fraai voorbeeld hiervan is vraagstuk 15 op blz. 105 van [5].
Het vraagstuk wordt als volgt geformuleerd:
'5 ballen worden onafhankelijk van elkaar en aselect in één der drie gelijke vakjes van een doos geworpen.

a Bereken de kans dat ze alle 5 in hetzelfde vakje terecht komen
b Bereken de kans dat een van te voren gekozen vakje leeg blijft
c Bereken de kans dat één van de drie vakjes leeg blijft (Pas op!)
d Hoe is de kansverdeling van de stochast X: het aantal lege vakjes?'

In [6] worden de volgende antwoorden gegeven:
'a De 2e tot en met de 5e moeten in hetzelfde vakje als de eerste komen, dus $p = (\frac{1}{3})^4$.
b $(\frac{2}{3})^5$
c $3 \cdot (\frac{2}{3})^5 - (\frac{1}{3})^4 = \frac{31}{81}$
d

x	0	1	2'.
$P(X = x)$	$\frac{49}{81}$	$\frac{31}{81}$	$\frac{1}{81}$

Helaas is de onder d) gegeven kansverdeling niet goed. De auteurs hebben getracht door de opbouw in verschillende stappen het vraagstuk eenvoudiger te maken. Maar doordat dit onzorgvuldig is gebeurd leiden ze de leerlingen en zichzelf tot een onjuiste oplossing. De woorden 'Pas op!' gebruikt onder c) zijn wel bijzonder toepasselijk.
Vraag a) en antwoord a) zijn correct. Vraag b) en antwoord b) zijn op zich ook correct. Maar als vraag b) als volgt geformuleerd zou zijn: 'Bereken de kans dat precies één van te voren gekozen vakje leeg blijft' met als antwoord $(\frac{2}{3})^5 - 2/3^5$, dan zouden er in c) en in d) geen fouten gemaakt zijn.
Het juiste antwoord op vraag c) luidt:

$$3[(\tfrac{2}{3})^5 - 2/3^5] = \tfrac{32}{81} - \tfrac{2}{81} = \tfrac{30}{81}$$

De kansverdeling wordt dan

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{50}{81}$	$\frac{30}{81}$	$\frac{1}{81}$

De fout die de auteurs onder c) maken zit als volgt in elkaar. Bij de factor $3(\frac{2}{3})^5$ neem je de mogelijkheid op alle ballen in één vak niet driemaal maar zesmaal mee. Je moet er dus niet $1/3^4 = 3/3^5$ maar $6/3^5$ aftrekken. Door vraag b) direct beter te formuleren vermijd je deze moeilijkheid.
De kans op precies één vak leeg kan natuurlijk ook als volgt berekend worden.

Definiëer de gebeurtenissen:

A: vak 1 is leeg
B: vak 2 is leeg
C: vak 3 is leeg

P(precies één leeg vak) = $P(A \cup B \cup C) - P(2$ vakken leeg) $= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - \frac{1}{81} = 3(\frac{2}{3})^5 - 3(\frac{1}{3})^5 - \frac{1}{81} = \frac{30}{81}$.

Overigens wordt er bij dit vraagstuk ook vanuit gegaan dat de ballen van elkaar te onderscheiden zijn. Anders zijn er geen 3^5 verschillende mogelijkheden maar $\binom{7}{5} = 21$. Het is voor de leerlingen prettig dit gegeven in het vraagstuk te vermelden.

4 *Een onjuist advies van Pascal aan Chevalier de Méré*

Tot slot een ander probleem dat de Méré aan Pascal voorlegde. De heren A en B spelen het volgende spel. Ze werpen met een eerlijke dobbelsteen. Als het resultaat van de worp even is wint A de ronde en moet B één gulden in de pot storten. Als het resultaat van de worp oneven is wint B de ronde en moet A één gulden in de pot storten. Wie als eerste vijf ronden gewonnen heeft krijgt de pot. Door onvoorziene omstandigheden moeten de heren na 7 ronden het spel afbreken op het moment dat A vier en B drie ronden gewonnen heeft. Hoe moet de pot nu eerlijkheidshalve verdeeld worden? Er was onenigheid over de vraag of dit in de verhouding 4 : 3 of (5–3) : (5–4) diende te gebeuren. In een brief, gedateerd 24 augustus 1654, van Pascal aan Fermat verwerpt hij deze oplossingen en stelt de volgende voor:

Stel dat er nog tweemaal gespeeld wordt (na negen ronden is er zeker een winnaar). Dan zijn er vier mogelijkheden:

A wint, A wint
A wint, B wint
B wint, A wint
B wint, B wint

Aangezien deze gevallen allen even waarschijnlijk zijn en in drie van de vier gevallen de pot naar A gaat, dient er verdeeld te worden in de verhouding 3 : 1. A krijgt $\frac{3}{4} \times f7,- = f5,25$, zijn winst is $f2,25$. B krijgt $\frac{1}{4} \times f7,- = f1,75$, zijn verlies is $f\,2,25$.

Indien men deze oplossing aan zijn leerlingen voorlegt zullen ze er bezwaar tegen maken. Immers in werkelijkheid worden er niet steeds negen ronden gespeeld.

Zodra iemand vijf ronden gewonnen heeft stopt het spel.

De werkelijke mogelijkheden zijn:

A wint.
B wint, A wint
B wint, B wint

Deze drie gevallen zijn echter niet even waarschijnlijk

P(A wint) $= \frac{1}{2}$; P(B wint, A wint) $= \frac{1}{4}$; P(B wint, B wint) $= \frac{1}{4}$.

De verhouding van de winstkansen is opnieuw $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$.

Deze oplossing zullen de leerlingen zonder problemen accepteren. Het is nuttig ze erop te wijzen dat natuurlijk geldt:

P(A wint de 8e ronde) = P(A wint de 8e ronde $\wedge$ A wint de 9e ronde) + P(A wint de 8e ronde $\wedge$ B wint de 9e ronde).

Overigens zou ik, als A, met deze oplossing van Pascal geen genoegen nemen. Immers in de oplossing van Pascal zitten wel de toekomstige winstkansen, maar niet het bijbehorende geld verdisconteert. En dat is weinig consequent. Ik zou de volgende oplossing willen voorstellen:

8e ronde	9e ronde	winst van A : W	kans
A wint	–	ƒ 5,–	$\frac{1}{2}$
B wint	A wint	ƒ 5,–	$\frac{1}{4}$
B wint	B wint	–ƒ 5–	$\frac{1}{4}$

De te verwachten winst voor A is:
$E(W) = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 - \frac{1}{4} \cdot 5 =$ ƒ 2,50. A zou op grond hiervan ƒ 5,50 uit de pot moeten krijgen, immers zijn *op moment van afbreken* te verwachten winst is ƒ 2,50. Pascal is dus wat te zuinig met zijn geadviseerde winst van ƒ 2,25.

Literatuur

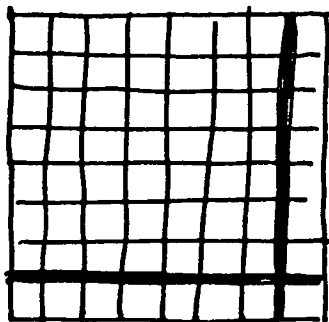
1 Noether, G. E.,
Introduction to statistics, a nonparametric approach. Houghton Mifflin, second edition, 1976.
2 Feller, W.,
An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1, Wiley, third edition.
3 Chung, K. L.,
Elementary probability theory with stochastic processes. Springer-Verlag, 1974.
4 Råde, L.,
The teaching of probability and statistics. Wiley, 1970.
5 Nijdam, B.,
Statistiek en kansrekening voor het VWO, 2e geheel herziene druk, IVIO.
6 Nijdam, B.,
Statistiek en kansrekening, antwoorden, 2e geheel herziene druk.
7 Bell, E. T.,
Men of Mathematics I, Pelican Books, 1965.

Vakdidaktische Notities

FRED GOFFREE

4 Konkretiseren

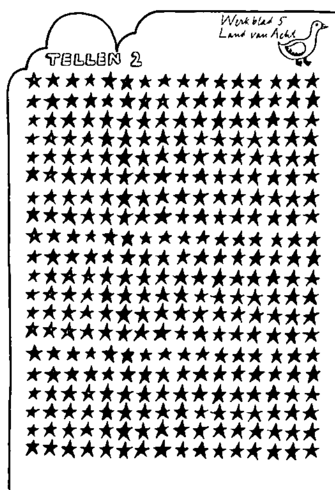
Stelt u zich voor, een groep van ca. 24 eerstejaars P.A.-studenten in de eerste maand van hun opleiding. Er zijn erbij die al jaren geleden het vak wiskunde hebben laten 'vallen'. Anderen hebben 'mavo met wiskunde' gedaan en een stuk of vijf studenten hebben wiskunde bestudeerd op atheneum nivo. Met deze heterogene groep werken we gedurende ongeveer 4×2 lesuren in 'Het Land van Acht', waar men het rekenen beoefent met achttallig geschreven getallen. Uitstapjes (of vluchtpogingen) naar het tientallige systeem zijn ten strengste verboden, hetgeen de waarschijnlijkheid vergroot dat deze a.s. onderwijzers en onderwijzeressen de bekende moeilijkheden van het aanvankelijk rekenen nog eens aan den lijve ervaren. Oude herinneringen komen boven en nieuwe vakdidaktische ontwikkelingen worden naar waarde geschat. Zo blijkt de lusabakus een hulpmiddel bij uitstek. [1])
Op een zeker ogenblik worden we geplaatst voor een vermenigvuldiging: 7×7. En Sophie doet een voorstel: $7 \times 7 = 10 \times 10 - 1 \times 1$. Daar de andere studenten niet onmiddellijk in opstand komen – ik geef ze ook niet zoveel tijd daarvoor – krijg ik de kans hierop in te gaan. 'Hoe zou je dit aan kinderen willen *uitleggen*?' Op het rechter bord komt een onderwijzeres (in het Land van Acht!) aan het woord, die graag de problematiek 'laat zien' in een duidelijke situatieschets. Het andere bord wordt gereserveerd voor de leerkracht die graag redeneert in volzinnen.
U begrijpt de gang van zaken. Het plaatje op het bord rechts helpt iedereen, in een oogopslag, uit de droom.



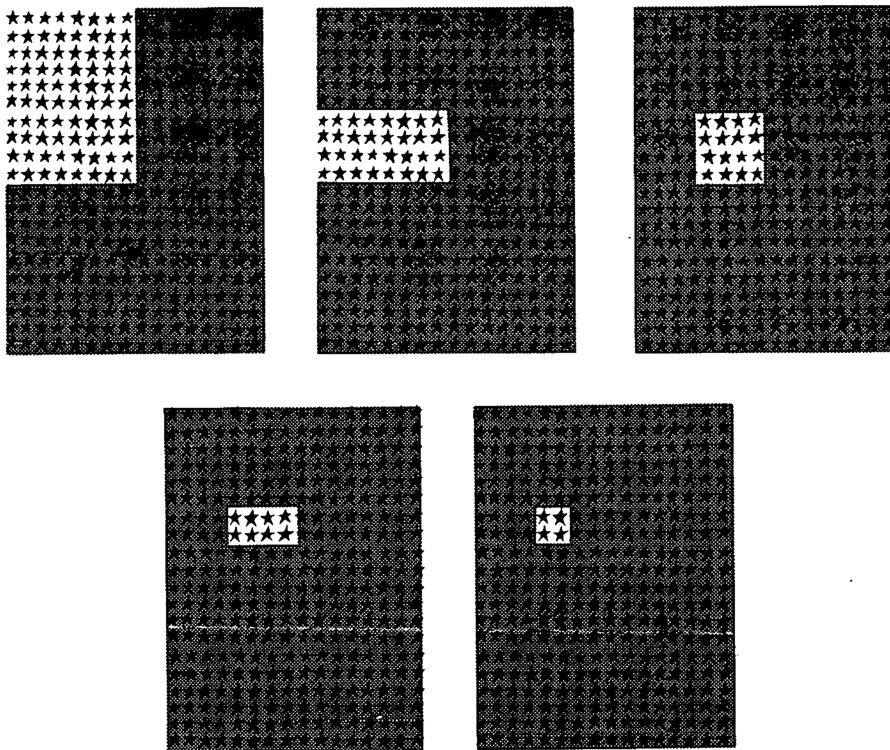
[1] Zie o.a. leerplanpublikatie 2 Wiskobas-Bulletin pag. 135

Sophie vraagt zich verbaasd af waarom zij dit niet direkt had 'gezien'.
Het redeneerwerk op het linkerbord blijkt nu ook door dit plaatje ondersteund te worden . . .

Onder dezelfde omstandigheden speelden we het spelletje 'Raad mijn getal'. Iemand heeft een getal (onder de 100) in gedachten, en de anderen moeten dit vinden door het stellen van vragen als: is het groter dan . . .?
Zowel voor basisschoolleerlingen als voor deze studenten is het in de eerste plaats de bedoeling om een verstandige strategie te ontwikkelen. Het waarom van die strategie (bijvoorbeeld: waarom kies je steeds 'het midden') en het maksimaal aantal stappen dat maar nodig is, kan ook onderzocht worden. Let je vooral op het oefenaspekt, dan leren kinderen zich vooral oriënteren in de rij van de getallen tot 100. Voor de studenten had deze rij evenwel de achttallige struktuur, die nog niet zo helder 'voor de geest' stond.
Na één spelletje hadden velen al door wat een goede strategie was. Het midden kiezen van de intervallen is op de achttallige getallenlijn trouwens ook een genoegen, tenslotte is $2^6 = 100$. De grote kracht van deze strategie (halveren van intervallen) werd voor velen pas goed duidelijk toen ze een eigengemaakte, achttallige, duimstok gingen gebruiken. In het begin konden hele stukken weggedraaid worden.
Toch zou blijken dat een nog duidelijker konkretisering van de strategie mogelijk was. Daarvoor kwam de hint van prof. Freudenthal die bij de les aanwezig was, op eksakt het goede moment.



Een leerling neemt een bepaalde ster in gedachten (teken even op eigen werkblad aan !). Zonder enige aarzeling begint Amel te vragen: 'Zit ie in de bovenste helft . . .'
Op de overheadprojektor worden vragen en antwoorden bijgehouden:



Het was tijdens dit proces van overdekken dat ik me plotseling herinnerde hoe ik, jaren geleden, tijdens mijn studie de aktiviteiten rond de 'Intervallen Schachtelung' trachtte voor te stellen. In mijn geval heeft een antwoord blijkbaar lang op zich laten wachten. Maar desondanks moet er, meer dan tien jaar geleden, toch een diepe leerindruk ontstaan zijn . . .

Met wiskundeonderwijs hoop je bij je leerlingen voldoende diepe indrukken achter te laten. Je wilt graag dat ze, op de juiste momenten in de geëigende situaties, weer in het bewustzijn komen. Blijkt het dan funktionele kennis te zijn die opgedaan is, dan kan ze toegepast worden, zodat oplossingen van de gegeven problematiek binnen bereik komen.
Natuurlijk is dit alles simpel geformuleerd. Op een didaktiekeksamen zou je dat anders moeten zeggen. Belangstellende eksamenkandidaten kunnen een passende teorie vinden in bijvoorbeeld 'Wiskundig Denken' van Skemp of 'De psychologie van het leren' van C. van Parreren.
De ervaring met het nest van intervallen op de overheadprojektor heeft me aan het denken gezet. Zijn er meer van die indrukken uit mijn eigen studietijd die verband houden met konkretiseringen? Ik kom dan bij mijn kennismaking met de propositielogika, waar je met plaatjes van 'waarheidsverzamelingen' een redenering kan zichtbaar maken. Inderdaad een belevenis van de eerste orde, die pas minder waard werd toen bleek dat de redeneringen in dit gebied van de formele

logika bij lange na niet 'het wiskundig-menselijk' redeneren weerspiegelden. Ook heb ik een geweldige herinnering aan mijn oefeningen in het lineair programmeren, waarbij eenvoudige optimaliseringsproblemen door middel van grafieken zichtbaar werden opgelost.
Enigszins verwant hiermee vermoed ik de kracht te zijn die uitging van sprekende termen als 'verdichtingspunt', 'klonterrij', 'trapfunktie' e.d. Ze laten een mogelijkheid open voor een eigen konkretisering, die van ondersteunende waarde kan zijn bij het verkrijgen van inzicht in de teorie.
Vreemd is, dat ik me er in die tijd sterk voor hoedde om deze manier van denken aan anderen mee te delen. De angst dat men mij zou betichten van laag nivowerk of zelfs van onwiskundige aanpak, leidde zelfs tot een schijnheiligheid in het onderwijzen.
Ik herinner me nog goed de manier waarop ik voor m.o.-A studenten de teorie van de Riemann-integraal afleidde. Alle stappen hadden voor mij een zeer konkrete achtergrond – ik kon a.h.w. steeds een plaatje tekenen ter ondersteuning van het begrip – maar ik noteerde alle zaken in puur algebraïsche volzinnen. Ik weet niet of mijn toenmalige studenten de truc doorhadden en thuis tot een eigen konkretisering kwamen. Ik hoop het – achteraf – eigenlijk wel.
Het ligt voor de hand dat dit wiskundig snobisme op lager nivo toegepast tot een kriminele didaktiek zou leiden. Anders gezegd: op het nivo van de schoolwiskunde màg konkretiseren niet alleen, je zou het misschien wel moeten stimuleren.
Professor Freudenthal is – zo u wilt op heel laag nivo – begonnen met te konstateren dat jonge kinderen spontaan konkretiseren [1]) en op iets oudere leeftijd (basisschool) deze eigenschap kunnen benutten om in vrij ingewikkelde situaties toch tot een oplossing te komen [2]).
Mede naar aanleiding van de veelgehoorde opmerking van kollega's ('zorg op de basisschool er nu alleen maar voor dat ze rekenen leren, de rest . . .') heb ik eens een paar rekenmethoden voor de lagere school nader bekeken. Wordt daarin, zo luidde mijn vraag, aan de mogelijkheid van het konkretiseren tegemoet gekomen?
In het eerste deeltje voor de vijfde klas vind ik in heel wat paragrafen vraagstukken van het type:

> Er zijn n objekten, samen van de grootte x, één ervan is y groter dan de rest. Hoe groot is elk?

Objekt en grootheid variëren, maar steeds is het te gebruiken oplossingsschema gegeven:

> **De vakantie is voorbij en de school weer begonnen. Heel wat kinderen gaan bij de kantoorboekhandel de nodige inkopen doen. Zo ook Ria. Ze koopt een tekenschrift en een doosje kleurpotloden en betaalt daarvoor *f* 1,95. Het kleurdoosje is 45 ct duurder dan het tekenschrift.**
> **Hoeveel kost elk?**

[1] Zie 'Wandelingen met Bastiaan' in Pedamorfose
[2] Zie Euclides jaargang 50 jubileumnummer
[3] 'Uitkomst van Cas Klavier e.a. Uitgeverij Zwijsen pag. 19

Je begint met de 45 ct te betalen die de tekendoos meer kost dan het schrift.
Nu moet voor elk nog evenveel betaald worden.
ƒ 1,95 – ƒ 0,45 = ƒ . , . .
Het tekenschrift kost dus ƒ . , . . : 2 = ƒ . , . .
Het kleurdoosje kost ƒ . , . . + ƒ . , . . = ƒ . , . .

Het komt me voor dat de auteurs, met deze beschrijving van dè oplossingsmetode, het hierboven wiskundige snobisme praktiseerden. Het konkretiseren zou eigenlijk door de kinderen zelf beoefend moeten worden. De gewekte indruk, dat het leren van dit specifieke type vraagstuk met oplossing op zichzelf belangrijk zou zijn, is dan tegelijkertijd weggenomen.
Een nadere analyse van de opgenomen 'redaktie-vraagstukken' stelde me opnieuw voor een verrassing. Vraagstukjes als

Op een parkeerterrein stonden zesmaal zoveel personenwagens als bussen. In het geheel waren er dat 238.
Hoeveel van elk?
6 personenwagens + 1 bus = . . voertuigen.
238 voertuigen = . . × . . voertuigen.
Dus . . bussen en . . × . . personenwagens = . . . personenwagens.

komen eveneens veelvuldig voor. Een eerste poging tot konkretisering van de problematiek laat duidelijk tot uitdrukking komen dat een (visueel) verhoudingsbegrip verondersteld wordt. Het oplossingsschema door de auteurs in de tekst aangeboden, doet vermoeden dat dit begrip bij hun niet gefunktioneerd heeft.
Verder bladerend blijkt dat de leerlingen, die deze rekenmetode moeten volgen, geen gelegenheid wordt geboden zich, al opgaven makend, wiskundig te ontwikkelen. Welk effekt het invullen van gegeven oplossingsschema's en het daardoor uit het hoofd leren ervan, heeft, is mij niet bekend. Wel bekend zijn mij de positieve resultaten die kinderen behalen door het funktioneel gebruik van de getallenlijn, het honderdveld, stroken voor verhoudingen, roosters voor produkten, grafieken voor afstand-tijdproblemen (zie ook Vakdidaktische notities nr. 1) het schaduwmodel voor verhoudingen, het boomdiagram voor telproblemen, het stadsplan, de kanstol en de abakus.
Bij de ontwikkeling van het onderwijs voor de basisschool, waarin deze zaken aan de orde komen, ben ik nauw betrokken geweest. Steeds werd me daarbij duidelijker dat het belang van deze wiskundige aktiviteit veel verder reikt dan het lokale oplossen van problemen en het vormen van denkmodellen. Het is de attitude van het konkretiseren die in tal van situaties de mens in staat stelt een gegeven problematiek aan te vatten.
Het is daarom dat ik mijn kollega's wiskunde, die leerlingen van de basisschool in hun brugklassen ontvangen, gaarne een analyse van het wiskobasprogramma [2]) kan aanbevelen. De gevolgen voor de didaktiek van de wiskunde in het voortgezet onderwijs zouden we daarmee eens onder ogen moeten zien. Ik ken verschillende personen die graag meedoen.

[1]) 'Uitkomst' van Cas Klavier e.a. Uitgeverij Zwijsen, pag. 96.
[2]) Zie Wiskobas-Bulletin leerplanpublikatie 2, december 1975: 'Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool'.

Dijkstra
Barneveld Lyceum
02154 – 12774

Buigpunten? Ja!

Drs. M. S. R. NIHOM

In Euclides 52, no. 3, blz. 108 staat een artikel van A. H. Nieuwenhuis met als titel 'Buigpunten ja, buigpunten nee?'. Mijn antwoord op zijn vraag is duidelijk; zie boven.
Collega Nieuwenhuis is kennelijk uitgegleden als gevolg van de geringe aandacht, die het buigpunten-onderzoek in onze huidige leerboeken krijgt. Hij komt er daardoor in een heel eenvoudig geval zelfs toe om van een calamiteit(!) te spreken.
Voordat ik iets zeg over de wijze, waarop m.i. dit onderzoek zou kunnen plaatsvinden eerst nog even een opmerking. In de herziene derde druk van dl. 9V van 'Moderne Wiskunde' worden 10 aspecten genoemd, die bekeken moeten worden bij het tekenen van de grafiek van een functie. Deze 10 aspecten zijn natuurlijk niet alle even belangrijk; sommige zelfs af en toe overbodig. Maar dit collectivum van 10 behoedt je voor uitglijden. Elk afzonderlijk onderzoekje levert weer nieuwe informatie. Het zoeken van b.p.'s (buigpunten) is (a) zeker niet het moeilijkste onderdeel, en (b) verschaft naar verhouding veel informatie. Hoe zou nu dat b.p.-onderzoek in onze VWO-klassen kunnen geschieden?
Wel, als een punt van een grafiek (of kromme) b.p. is, dan verandert in dat punt de aard van de kromming, een hol gedeelte van de figuur gaat over in een bol gedeelte, of omgekeerd: bol wordt hol.
Opgemerkt dient alvast te worden, dat het omgekeerde natuurlijk niet geldt: een punt, waar hol in bol overgaat is niet altijd een b.p. Men denke aan het punt (1, 0) van de cirkel $x^2+y^2 = 1$ of bijv. aan de grafiek van de functie f:

$$x \to \left[\begin{array}{l} x^2 \text{ als } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ als } x \geqq 0 \end{array} \right.$$

Onder hol (bol) wordt hier verstaan holle (bolle) kant van de figuur naar beneden gekeerd.
Aangezien het hol/bol zijn van een kromme bepaald wordt door het negatief resp. positief zijn van de tweede afgeleide komt b.p.-onderzoek neer op tekenonderzoek van deze afgeleide, een onderzoek, dat primair gericht is op een hol/bol-onderzoek, waaruit dan als surprise de b.p.'s tevoorschijn komen.
We beginnen met grafieken van functies. De grafiek van f bezit een b.p. $(a, f(a))$

als aan de twee volgende vorwaarden is voldaan:
a a is tekenwisselingswaarde van f'',
b de grafiek van f bezit een raaklijn in $(a, f(a))$.
Opm. bij a: de waarde van $f''(a)$ komt in deze voorwaarde niet voor; $f''(a)$ behoeft zelfs niet te bestaan. Zie voorb. 1.
bij b: in deze voorwaarde staat niet, dat $f'(a)$ gedefinieerd (eindig) moet zijn. Zie voorb. 2.

Vb. 1.

$f: x \longrightarrow \begin{cases} x^2 \text{ als } x \geqq 0 \\ -x^2 \text{ als } x < 0 \end{cases}$; dan is $f': x \longrightarrow \begin{cases} 2x \text{ als } x \geqq 0 \\ -2x \text{ als } x < 0 \end{cases}$

en $f'': x \longrightarrow \begin{cases} 2 \text{ als } x > 0! \\ -2 \text{ als } x < 0 \end{cases}$. Dit leidt tot het volgende teken-

overzicht:								
grafiek:	hol				bol			
teken f'':	-	-	-	?	+	+	+	
waarde x:				0				

Dus is $O(0, 0)$ buigpunt.

Vb. 2.

$f: x \to \sqrt[3]{x}$. f' is in 0 niet gedefinieerd; de grafiek van f bezit in (0, 0) een verticale raaklijn. O is wederom b.p., omdat f'' in O van teken verandert.

Laten we nu eens krommen, die door een parametervoorstelling gegeven zijn in ons onderzoek betrekken, De gang van zaken wijkt hier feitelijk nauwelijks af van de hierboven geschetste. Ik kies ter illustratie uit Moderne Wiskunde, dl. 9V opgave 31 uit hfdst. 15 (oude druk hfdst. 13).

$x(t) = t + \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ en $y(t) = t^2 - 2t - 3$. Uit $\frac{dy}{dx} = \frac{2t^2}{t+1}$ en $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{t^2}$

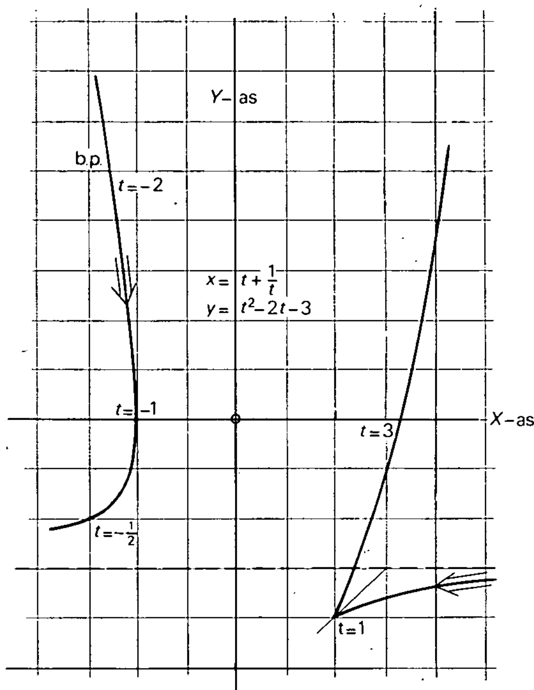
volgt $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2t^3(t+2)}{(t+1)^3(t-1)}$, waaruit volgt

kromme:	bol		hol		bol		hol		bol
d^2y/dx^2:	+		-		+		-		+
t:		-2		-1		0		1	t-as

Met opzet is hier geen aandacht geschonken aan de t-waarden -2, -1, 0 en 1. Deze zijn immers voor het b.p.-onderzoek niet van belang; misschien ware daarom ook 'hol/bol'-onderzoek een betere naam. De kromme dient in de bij de genoemde t-waarden behorende punten een raaklijn te bezitten wil er sprake kunnen zijn van een b.p.; een noodzakelijke, maar niet voldoende voorwaarde. De verdere gang van zaken zal duidelijk zijn. Als t de verzameling $\mathbb{R}$ op de gebruikelijke wijze doorloopt (van $-\infty$ tot $+\infty$) wordt er op K een

'wandelrichting' geïntroduceerd. Het punt van K, waar $t = -2$ bezit een omgeving waarin K grafiek is van een functie; $x(t)$ is een stijgende functie immers. De punten met $t = \pm 1$ bezitten zo'n omgeving niet. In die punten is $x(t)$ niet monotoon; voor $t = -1$ resp. $t = 1$ neemt $x(t)$ een max. resp. min. aan. Vandaar:

$t = -2$: 2de afgeleide wisselt van teken, $x(t)$ stijgt : b.p.!
$t = -1$: 2de afgeleide wisselt van teken, $x(t)$ is extreem: geen b.p.
$t = 0$: $x(t)$ is niet gedefinieerd, : geen b.p.
$t = 1$: 2de afgeleide wisselt van teken, $x(t)$ is extreem: geen b.p.



Dat in de voorbeelden, die Nieuwenhuis noemt als gevallen, waarin hij vastloopt, de problemen sneller verdwijnen dan sneeuw voor de zon, zal duidelijk zijn.

Hij koos als voorbeeld o.a.: $x = |t|$; $y = \begin{cases} t^2 & \text{als } t \geqq 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{als } t < 0 \end{cases}$.

Dan is $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} 2t & \text{als } t \geqq 0 \\ -t & \text{als } t < 0 \end{cases}$. Voor de tweede afgeleide (functie van t) vinden we dan: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \begin{cases} 2 & \text{als } t > 0 \\ 1 & \text{als } t < 0 \end{cases}$. Geen tekenwisseling, dus geen sprake van een b.p.

In het andere voorbeeld was $x = |t|$ en $y = t^2$. Als $t < 0$ dan is $dy/dx = -2t$

en $d^2y/dx^2 = 2$ (!, functie van t); terwijl voor $t > 0$ geldt $dy/dx = 2t$ en $d^2y/dx^2 = 2$. Wederom geen tekenwisseling, geen sprake van een b.p. Vraagstuk 1.62 uit de bekende bundel van Groenevelt c.s., Opgaven WE en WT is een bizonder geschikt voorbeeld om een 1.1. in aanraking te brengen met de b.p.-problematiek.

Conclusies

1 Het weglaten van b.p.-onderzoek uit het VWO-examenprogramma is een ontoelaatbare verschraling. Wel dient in elke opgave na de opdracht 'Onderzoek f en teken de grafiek' vermeld te worden of hiermee ook b.p.-onderzoek bedoeld wordt. Niet iedere tweede afgeleide is even gemakkelijk op zijn teken te onderzoeken. Ideaal zou m.i. zijn slechts die opgaven toe te laten, waarbij dit tekenonderzoek zonder al teveel moeilijkheden doenlijk is. Analoog bij vraagstukken over parameterkrommen.

2 Onze boekjesschrijvers dienen meer plaats in te ruimen voor b.p.-onderzoek en dit op te vatten als onderdeel van een hol/bol-onderzoek.

Over het opzoeken in goniometrische tabellen op het V.W.O.

R. LEENTFAAR

Het opzoeken van waarden in functietabellen is voor een ieder een vervelende bezigheid. Zo ook voor de leerling. Natuurlijk moet dit opzoeken wel gekend worden.
Met zakrekenmachines zou dit probleem snel zijn opgelost, maar met name op het centraal schriftelijk eindexamen zijn deze apparaten – helaas – nog verboden.
Nu zal elke leerling, van MAVO tot en met VWO, dat opzoeken beheersen. Immers, opgaven van het type $\tan x = 4{,}37$ moeten hem/haar, met de oplossing van dat probleem, bekend zijn.
Daarnaast worden, zeker over enige jaren, op het VWO dè functies $x \to \arcsin x$, $x \to \arccos x$ en $x \to \arctan x$ behandeld.
Graag zou ik dat willen aangrijpen om het vervelende en irriterende opzoeken in tabellen, zeker op het eindexamen vwo, uit te bannen.
De volgende uitwerking van de opgave: Los op in $\mathbb{R}$: $2 \cos x + 3 \sin x = 1$ zou ik dan ook op een eindexamen VWO *volledig* goed willen rekenen.
Oplossing:

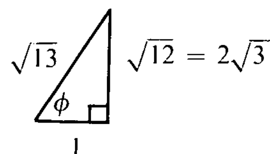
$$2 \cos x + 3 \sin x = 1$$

$$\left(\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$\sqrt{13}.\cos(x-\phi) = 1 \text{ met } \cos\phi = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ en } \sin\phi = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

ϕ in I, dus $\tan\phi = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$$\cos(x-\phi) = \cos\psi \text{ met } \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{13}}$$



dus $\tan\psi = 2\sqrt{3}$

$$x - \phi = \pm\psi + k.2\pi (k \in \mathbb{Z})$$
$$x = \phi + \psi + k.2\pi \vee x = \phi - \psi + k.2\pi, \text{ dus}$$
$$x = \arctan 1{,}5 + \arctan 2\sqrt{3} + k.2\pi \vee$$
$$x = \arctan 1{,}5 - \arctan 2\sqrt{3} + k.2\pi$$

Waarom zouden we dit niet goed kunnen rekenen? Het verlost ons van het vervelende en irriterende opzoekwerk, het is *geen* benadering, het is (een omschrijving van) het enig juiste en exacte antwoord.
Zou één en ander wellicht aanleiding zijn voor HAVO (en MAVO) om zeer bescheiden de cyclometrische functies in te voeren (desnoods alleen arctan)?
Tenslotte: Bij $\cos \phi = -\frac{4}{5}$ en $\sin \phi = -\frac{3}{5}$, ϕ in III, komt er $\tan \phi = 0{,}75$ maar $\phi = \arctan 0{,}75 + \pi$!
Ten behoeve van grafieken zal men toch moeten opzoeken, maar daarvoor ware het zeker bij examenwerk wenselijk, dat voor de uitkomsten geen tabel nodig is!

16de Internationale Wiskunde Olympiade

Bij de 16e Internationale Wiskunde Olympiade, die dit jaar van 5-12 juli in Belgrado gehouden is, heeft de Nederlandse ploeg een bijzonder eervolle plaats behaald als vijfde (met 185 punten) na de Verenigde Staten (202), Sovjet Unie (192), Groot Brittannië en Hongarije (elk 190). Bulgarije werd zesde met 171 punten.

Ontbinden in factoren

P. G. J. VREDENDUIN

Enige tijd geleden had ik met een collega het volgende gesprek. In factoren ontbonden moest worden $6a+6b$.
'Daar komt uit $2 \cdot 3(a+b)$', zei mijn collega.
'Waarom zet je $2 \cdot 3(a+b)$? Ik zet altijd $6(a+b)$. Dat is veel eenvoudiger.'
'Ik zet altijd $2 \cdot 3(a+b)$.'
Omdat ik besefte dat de argumentatie van mijn collega minstens even intelligent was als de mijne, heb ik de gedachtenwisseling hier beëindigd.
Toch liet het probleem me niet los. Ik ben aan het ontbinden geslagen.
In $\mathbb{N}$.

$$15 = 3 \cdot 5$$

Geen probleem.
In $\mathbb{Z}$.

$$-15 = -3 \cdot 5; \quad -15 = 3 \cdot -5; \text{ of misschien wel } -15 = -1 \cdot 3 \cdot 5?$$

In de verzameling van de even positieve gehele getallen $\{2, 4, 6, \ldots\}$.

$$360 = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 2 \cdot 10 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 90 = \text{enz.}$$

In de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met rationale coëfficiënten.

$\frac{1}{6}a+\frac{1}{6}b = \frac{1}{6}(a+b)$; of $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(a+b)$?
$2a+3b$ kan niet verder ontbonden worden; of $2(a+\frac{3}{2}b)$?
$\frac{1}{4}a+\frac{1}{6}b = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b)$; of $\frac{1}{12}(3a+2b)$?
$\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{6}ab+\frac{2}{3}b^2 = (\frac{1}{2}a+2b)(a+\frac{1}{3}b)$; of $(a+4b)(\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}b)$?

Veel touw is er langzamerhand niet meer aan vast te knopen. En dus wordt het tijd te trachten de zaak wat meer principieel te stellen.[1]
We gaan uit van een verzameling V waarin een operatie gedefinieerd is die aan elk geordend paar $(a, b) \in V \times V$ een element van V toevoegt. Deze operatie noemen we vermenigvuldigen. Het beeld van (a, b) noteren we $a \cdot b$ of ook wel kortweg ab. V voorzien van de operatie $\cdot$ noteren we $(V, \cdot)$.

[1] Ik heb daarbij dankbaar gebruik gemaakt van enkele suggesties van Dr. A. Grootendorst.

We nemen aan dat de operatie $\cdot$ commutatief en associatief is. Het kan zijn dat V een éénelement bevat, d.w.z. een element e waarvoor geldt

$$\forall x \in V : e \cdot x = x$$

Het is niet mogelijk dat V meer dan één éénelement bevat. Immers als e_1 en e_2 éénelementen van V zijn, dan geldt

$$e_1 e_2 = e_2 \text{ en } e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_1 \text{ dus } e_1 = e_2$$

Indien V een éénelement bevat, noteren we dit 1.
Het is mogelijk dat V een nulelement bevat, d.w.z. een element n waarvoor geldt

$$\forall x \in V : n \cdot x = n$$

Het is niet mogelijk dat V meer dan één nulelement bevat. Immers als n_1 en n_2 nulelementen van V zijn, dan geldt

$$n_1 n_2 = n_1 \text{ en } n_1 n_2 = n_2 n_1 = n_2 \text{ dus } n_1 = n_2$$

Indien V een nulelement bevat, noteren we dit 0.
Na deze voorbereiding wordt het tijd over te gaan naar ons eigenlijke doel: de ontbinding in factoren. Ter orientatie gaan we uit van het ieder bekende prototype: de ontbinding in $(\mathbb{N}^+, \cdot)$.
Definitie. p is een *priemgetal* $\overset{\text{df}}{=} (\neg\exists b, c : p = bc \wedge b \neq 1 \wedge c \neq 1) \wedge p \neq 1$
Definitie. a in factoren ontbinden wil zeggen: a schrijven als een produkt van priemgetallen.
De ontbinding in factoren is, op de volgorde van de factoren na, eenduidig bepaald.
Het ligt voor de hand dit prototype als springplank te kiezen voor de algemene definitie van ontbinding in factoren in $(V, \cdot)$.
Definitie. Als V een éénelement bevat, dan

$$p \text{ is een } \textit{priemelement van } V \overset{\text{df}}{=} (\neg\exists b, c \in V : p = bc \wedge b \neq 1 \wedge c \neq 1) \wedge p \neq 1$$

Als V geen éénelement bevat, dan

$$p \text{ is een } \textit{priemelement van } V \overset{\text{df}}{=} \neg\exists b, c \in V : p = bc$$

(Huiselijk gezegd: p is een priemelement van V wil zeggen, dat we p niet kunnen schrijven als produkt van twee elementen van V die ongelijk aan 1 zijn; 1 rekenen we niet tot de priemgetallen.)
Definitie. a ontbinden in factoren wil zeggen: a schrijven als produkt van priemelementen. We spreken alleen van ontbinding in factoren, als het resultaat, op de volgorde van de factoren na, eenduidig bepaald is. [1]
Uit deze definities volgt, dat het niet mogelijk is 1 en 0, als ze tot V behoren, in factoren te ontbinden. En uiteraard ook de priemelementen niet.
Als V echte delers van 1 bevat, [2] dan komt er van het ontbinden in factoren

[1] Correcter zou zijn te spreken van 'eenduidige ontbinding in priemfactoren'. Ik heb toch maar 'ontbinding in factoren' gezegd, omdat dit de gebruikelijke schoolterminologie is.
[2] a is in V een deler van 1 $\overset{\text{df}}{=} \exists x \in V : xa = 1$
a is in V een echte deler van 1 $\overset{\text{df}}{=}$ a is in V een deler van $1 \wedge a \neq 1$

niet veel terecht. Onderstel dat

$$bc = 1 \wedge b \neq 1 \wedge c \neq 1$$

Kies een van b, c en 1 verschillend element p. Dan is

$$p = pb \cdot c \wedge pb \neq 1 \wedge c \neq 1$$

en dus is p geen priemelement.
Ruw gezegd: het ontbinden in factoren lukt niet, omdat men een element p kan schrijven als een produkt van steeds meer factoren.

Nu wordt duidelijk, waarom we in moeilijkheden komen bij onze pogingen in $\mathbb{Z}$ en in de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met rationale coëfficiënten een ontbinding in factoren teweeg te brengen. In $\mathbb{Z}$ bestaat een echte deler van 1, namelijk -1. En in de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met rationale coëfficiënten bestaan talloze echte delers van 1, namelijk alle rationale getallen die van 0 en van 1 verschillen.
We kunnen nu kiezen tussen twee alternatieven:
afzien van ontbinden in factoren, indien V echte delers van 1 bevat;
ontbinden in factoren zo generaliseren, dat ook in dat geval ontbinding zinvol wordt.
We kiezen natuurlijk voor de laatste mogelijkheid, anders was de aardigheid er af.
Aan de hand van een voorbeeld proberen we tot de gewenste generalisatie te geraken. Voor V kiezen we weer de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met rationale coëfficiënten.

We proberen te ontbinden $\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{6}ab+\frac{2}{3}b^2$.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{13}{6}ab+\tfrac{2}{3}b^2 &= (\tfrac{1}{2}a+2b)(a+\tfrac{1}{3}b)\\ &= (a+4b)(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{6}b)\\ &= (\tfrac{1}{6}a+\tfrac{2}{3}b)(3a+b)\\ &= (\tfrac{3}{2}a+6b)(\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{9}b)\\ &= (\tfrac{1}{5}a+\tfrac{4}{5}b)(\tfrac{5}{2}a+\tfrac{5}{6}b)\end{aligned}$$

De eerste drie regels zien er zeer acceptabel uit, de vierde gaat ook nog wel. De laatste doet wat vreemd aan, maar principieel verschil met de vorige is niet of nauwelijks aan te wijzen. Vergelijken we de voorste factoren, dan zien we dat de volgende uit de vorige ontstaat door vermenigvuldiging met resp. $2, \frac{1}{6}, 9, \frac{2}{15}$. Bij de achterste factoren zijn deze getallen resp. $\frac{1}{2}, 6, \frac{1}{9}, \frac{15}{2}$. Al deze acht getallen zijn delers van 1.
Eigenlijk zit hierin niets verbazingwekkends. Als

$$A = B \cdot C$$

en d is een deler van 1, dan is ook

$$A = (dB) \cdot (d^{-1}C)$$

Bevat A een factor B en is d een deler van 1, dan bevat A dus ook een factor dB. Reden voor ons om alle factoren dB (d is deler van 1) over één kam te scheren. Terug naar ons voorbeeld. We kunnen zeggen, dat $\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{6}ab+\frac{2}{3}b^2$ ge-

schreven kan worden als produkt van twee factoren. De ene factor is $d(\frac{1}{2}a+2b)$ en de andere $d^{-1}(a+\frac{1}{3}b)$, waarin d een deler van 1 is.
Anders gezegd:
de ene factor behoort tot de verzameling van alle $d(\frac{1}{2}a+2b)$, waarin d een deler van 1 is;
de andere tot de verzameling van alle $d(a+\frac{1}{3}b)$, waarin d een deler van 1 is.
(De tweede formulering geeft minder informatie dan de eerste, omdat niet meer vermeld is, dat de beide waarden van d in de eerste en de tweede factor elkaars omgekeerde zijn; ze is echter voldoende voor het vervolg.)
We zien dat de beide factoren waarin $\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{6}ab+\frac{2}{3}b^2$ 'ontbonden' wordt, niet eenduidig bepaald zijn. Maar wel zijn eenduidig bepaald de verzamelingen van alle $d(\frac{1}{2}a+2b)$ resp. van alle $d(a+\frac{1}{3}b)$ (d is een deler van 1), waartoe deze twee factoren behoren. Ruw gezegd: ontbinden in factoren blijft mogelijk. De ontbinding is niet meer eenduidig, maar de factoren zijn wel op een deler van 1 na eenduidig bepaald.
We begrijpen nu waar we op aan moeten werken bij het construeren van een meer algemene definitie van ontbinden in factoren. We gaan het proberen.

Gegeven $(V, \cdot)$.
De verzameling delers van 1 (in V) noemen we E.
Definitie. p is een *priemelement van* $V \overset{\text{df}}{=}$

$$(\neg\exists b, c \in V : p = bc \wedge b \notin E \wedge c \notin E) \wedge p \notin E$$

Definitie. $p \sim q \overset{\text{df}}{=} p$ en q zijn priemelementen $\wedge \ \exists x \in E : p = xq$
$p \sim q$ wil dus zeggen, dat de priemelementen p en q op een deler van 1 na aan elkaar gelijk zijn.
We bewijzen zonder veel moeite, dat de relatie $\sim$ een ekwivalentierelatie is. Door $\sim$ wordt de verzameling van de priemelementen dus verdeeld in ekwivalentieklassen.
Definitie. De ekwivalentieklassen waarin de verzameling van de priemelementen verdeeld wordt door de ekwivalentierelatie $\sim$, heten *priemverzamelingen.*

Toelichting. In het bovengenoemde voorbeeld (waarin V de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met rationale coëfficiënten was) is

$\frac{1}{2}a+2b$ een priemelement.

We kunnen wel $\frac{1}{2}a+2b$ schrijven als produkt van twee factoren, bijv.

$$\tfrac{1}{2}a+b = \tfrac{1}{2}(a+2b)$$

maar hierin is de eerste factor een deler van 1, dus geen priemelement. En $\frac{1}{2}a+b$ schrijven als produkt van twee factoren die geen van beide deler van 1 zijn, is onmogelijk.

$$\tfrac{1}{2}a+b \sim a+2b$$

want ze verschillen in een factor $\frac{1}{2}$ en deze factor is een deler van 1.
De verzameling van alle $d(\frac{1}{2}a+b)$ (d is een deler van 1) is een priemverzameling.

Tot deze priemverzameling behoren niet alleen $\frac{1}{2}a+b$ en $a+2b$, maar ook bijv. $3a+6b$, $\frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b$, $\frac{3}{14}a+\frac{3}{7}b$, $-a-2b$.

Ontbinden in factoren wil weer zeggen: schrijven als een produkt van priemelementen.
Het eenduidig bepaald zijn, op de volgorde na, van deze priemelementen wordt nu niet geëist. Maar wel het eenduidig bepaald zijn, op de volgorde na, van de priemverzamelingen waartoe ze behoren.

Toelichting. $\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{6}ab+\frac{2}{3}b^2$ hebben we hierboven op vijf manieren geschreven als produkt van twee factoren.
In alle vijf gevallen waren deze twee factoren priemelementen.
Alle vijf eerste factoren behoorden tot dezelfde priemverzameling.
Alle vijf tweede factoren eveneens.
De priemelementen waren dus niet eenduidig bepaald (ze verschilden in een deler van 1).
Maar de priemverzamelingen waartoe ze behoorden, waren wel eenduidig bepaald.

Niet in factoren ontbonden kunnen worden 0, de elementen van E en de priemelementen.

We hebben nu twee definities van ontbinden in factoren gegeven.
Dat zou weinig zinvol zijn, als de nieuwe definitie geen uitbreiding was van de oorspronkelijke. Om dit te verifiëren gaan we de nieuwe definitie toepassen op situaties waarin we de oude vroeger gehanteerd hebben.
De oude definitie ging ervan uit dat de verzameling V geen echte delers van 1 had of zelfs niet eens een éénelement. Dit was het geval bij de ontbinding in $(\mathbb{N}, \cdot)$. Laten we hier onze nieuwe definitie eens op toepassen en onderzoeken of we de oude resultaten weer terug krijgen.
Priemelementen zijn volgens de oude definitie 2, 3, 5, 7, ... Omdat 1 de enige deler van 1 is, dus $E = \{1\}$, zijn ook volgens de nieuwe definitie dit de priemelementen.
De nieuwe definitie kent naast priemelementen ook priemverzamelingen. Het priemelement 2 behoort tot de priemverzameling die bestaat uit alle produkten $2d$, waarin d een deler van 1 is. Nu is 1 de enige deler van 1 en dus behoort 2 tot de priemverzameling $\{2\}$.
Algemeen zien we, dat de priemverzamelingen zijn $\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \ldots$
Bij het ontbinden van bijv. 15 constateren we dat

$$15 = \text{een element van } \{3\} \cdot \text{een element van } \{5\}$$

Dat kunnen we korter schrijven:

$$15 = 3 \cdot 5$$

en daarmee hebben we ons oorspronkelijke resultaat weer terug gekregen.
Als V geen echte delers van 1 bevat of geen éénelement, dan bestaan de priem-

verzamelingen elk uit precies één priemelement.[1] En daarmee is de invoering van priemverzamelingen overbodig geworden.
We keren terug naar de voorbeelden waarmee we begonnen zijn.
V is de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met rationale coëfficiënten. Gevraagd wordt te ontbinden

$$6a+6b$$

Niemand zal in twijfel trekken dat

$$6a+6b = 6(a+b)$$

en dat het soms doelmatig kan zijn $6a+6b$ te vervangen door $6(a+b)$.
Maar dat is ons probleem niet. Ons probleem is: is

$$6a+6b = 6(a+b)$$

een ontbinding in factoren? Anders gezegd: is

$$6(a+b)$$

het produkt van twee priemelementen?
Het antwoord op deze vraag luidt, zoals we al gezien hebben, ontkennend. De factor 6 is een deler van 1 en delers van 1 zijn per definitie geen priemelementen. Het is zelfs niet mogelijk $6a+6b$ als produkt van priemelementen te schrijven; $6a+6b$ is zelf een priemelement.
Dit priemelement behoort tot dezelfde priemverzameling als bijv. $a+b$, $-a-b$, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.
Misschien raakt men iets gemakkelijker met dit resultaat verzoend, als men bedenkt, dat het in principe even gek is te denken dat $6(a+b)$ een ontbinding is van $6a+6b$ als te denken dat (in $\mathbb{N}$) $1 \cdot 3$ een ontbinding is van 3.
Hoe zit het (in $\mathbb{Z}$) met -15? Levert ontbinding $-3 \cdot 5$ of $3 \cdot -5$ of $-1 \cdot 3 \cdot 5$? Er is een echte deler van 1, namelijk -1. We moeten dus de nieuwe definitie toepassen. Priemelementen zijn

$$2, 3, 5, \ldots, -2, -3, -5, \ldots$$

De priemverzamelingen zijn

$$\{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \{-5, 5\}, \ldots$$

Zowel $-3 \cdot 5$ als $3 \cdot -5$ zijn dus ontbindingen van -15. In beide gevallen behoren de factoren tot de priemverzamelingen $\{-3, 3\}$ en $\{-5, 5\}$.
Maar $-1 \cdot 3 \cdot 5$ is geen ontbinding van -15, omdat -1 een deler van 1 en dus geen priemelement is.

Ik kan mij voorstellen, dat men met gemengde gevoelens op het voorgaande reageert. Wat heb ik eraan voor de schoolpraktijk? Niet erg veel, dat geef ik graag toe. Nu zijn er vele termen die een wiskundeleraar geregeld hanteert en waarvan de betekenis niet altijd even duidelijk is. Ik denk aan termen als:

[1] Strikt genomen moeten we de afspraak maken dat, ingeval V geen éénelement bavat, voor elk priemelement p geldt: $p \sim p$. De ekwivalentieklasse waartoe p behoort, wordt dan ook in dit geval $\{p\}$.

verhouding, evenredigheid, tweeterm, differentiaal, elimineren, implicatie, variabele. In deze rubriek hoort ook ontbinden in factoren thuis. Men kan een prima leraar zijn zonder precies te weten, wat al deze termen betekenen. Maar men kan ook, althans zelf, precies willen weten wat de betekenis ervan is. Soms zal men achteraf zelfs merken daar toch bij zijn onderwijs profijt van te hebben en in staat te zijn door nauwkeuriger formulering een beter voorbeeld voor zijn leerlingen te zijn en ze daardoor voor later meer mee te geven. Vandaar dat ik het toch nuttig vond, ook voor mijzelf, te analyseren wat ontbinden in factoren nu eigenlijk zeggen wil. En ik wil proberen er nog iets aan toe te voegen, dat voor de schoolpraktijk enig nut heeft.
Die $6a+6b$ heeft me niet losgelaten. Dat dit niet ontbonden kan worden, is in ons onderwijs in de brugklas onverkoopbaar. Nu komt de ontbinding veelal aan de orde, als de rationale getallen nog niet ingevoerd zijn. En als ze dat wel zijn, kunnen we ze gevoeglijk even buiten beschouwing laten. Dus: we kiezen voor V de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met gehele coëfficiënten. Nu is er maar één echte deler van 1, namelijk -1. En dus is

$$6a+6b = 6(a+b)$$

niet zo gek, want 6 is geen deler van 1 meer. Toch staat hier nog geen ontbinding, want 6 is geen priemelement. Wel priemelementen zijn 2 en 3. En dus wordt de ontbinding

$$6a+6b = 2 \cdot 3(a+b)$$

Mijn collega had dus gelijk.
We zouden natuurlijk ook bijv. kunnen schrijven

$$6a+6b = -2 \cdot 3(-a-b)$$

Want 2 en -2 behoren tot dezelfde priemverzameling en eveneens $a+b$ en $-a-b$. Niemand zal wel in de verleiding komen dit te doen.
Iets anders wordt (in de praktijk) de situatie bij $2b-2a$. De een zal schrijven

$$2b-2a = 2(b-a)$$

en de ander

$$2b-2a = -2(a-b)$$

We begrijpen nu, dat het een precies even goed als het ander is.

Ten slotte het voorbeeld waarin V de verzameling van de even positieve gehele getallen is. Priemelement zijn nu alle getallen die precies één factor 2 bevatten.[1] En dus kunnen we 360 inderdaad op verschillende manieren als produkt van priemelementen schrijven, bijv.

$$360 = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 2 \cdot 10 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 90$$

Omdat er geen eenheidselement is, bestaan de priemverzamelingen elk uit pre-

[1] Zo is 6 priemelement van V, omdat 6 niet geschreven kan worden als produkt van twee getallen die beide tot V behoren (wel is $6 = 2 \cdot 3$, maar $3 \notin V$).

cies één priemelement. Aan de eenduidigheidseis is blijkbaar niet voldaan. En dus is het niet mogelijk in deze getalverzameling in factoren te ontbinden.

Enkele slotopmerkingen

1. Onderstel dat in V de deling, mits niet door 0, steeds mogelijk is. Dan geldt voor elk element a ($a \neq 0$) uit V

$$\exists x \in V : x \cdot a = 1$$

D.w.z. alle elementen van V, behalve 0, zijn delers van 1. Ontbinden in factoren is in V dan niet mogelijk.
Zo is het zinloos te willen spreken over ontbinding in factoren in $\mathbb{Q}$ of in $\mathbb{R}$. Het wordt nu misschien ook duidelijker, dat juist de toelating van rationale coëfficiënten bij de gehele algebraïsche vormen ons in moeilijkheden bracht.
2. Blijkbaar speelt bij het ontbinden geen rol, of er naast de vermenigvuldiging al of niet een optelling gedefinieerd is. In de praktijk leidt dit wel tot een merkwaardig terminologisch onderscheid. Is naast de vermenigvuldiging een optelling gedefinieerd, zoals bij de getalsystemen en de gehele algebraïsche vormen, dan spreekt men van ontbinden in factoren. Is er echter geen optelling gedefinieerd, dan is het gebruik te spreken van factoriseren. Achter dit terminologische onderscheid schuilt echter geen begripmatig verschil.
Een voorbeeld van factoriseren vindt men in de theorie van de eindige abelse groepen.
3. Wie daar gevoelig voor is, kan nu proberen grapjes uit te halen. Beschouw

$$(\mathbb{N}, +)$$

waarin + enerzijds gelezen moet worden als de gewone optelling in $\mathbb{N}$ en anderzijds als de operatie die we in dit artikel vermenigvuldiging genoemd hebben. Doen we dit en houden we het hoofd koel, dan zien we:
er is een éénelement, namelijk het getal 0 (want voor elke $a \in \mathbb{N}$ geldt $a+0 = a$);
er is precies één priemelement, namelijk het getal 1 (immers

$$\neg\exists x, y \in \mathbb{N} : x+y = 1 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0);$$

ontbinden in factoren wil zeggen: schrijven als een produkt van priemelementen, dus in ons geval: schrijven als een som van 1'en.
Ontbindingen in $(\mathbb{N}, +)$ zijn dus

$$2 = 1+1,\ 3 = 1+1+1,\ 4 = 1+1+1+1, \ldots$$

Waarmee we wel wat abstracter, maar niet veel wijzer geworden zijn.
4. Nog een grapje. We beschouwen

$$(\mathbb{Z}, \min)$$

waarin we onder min (a, b) het minimum van de getallen a en b verstaan. De operatie min is commutatief en associatief. Het is dus ook een vermenigvuldiging in de zin die we in dit artikel aan dat woord gehecht hebben.
Er is geen éénelement, want

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \min(e, x) = x$$

zou betekenen dat e het grootste element van $\mathbb{Z}$ was en $\mathbb{Z}$ heeft geen grootste element.

p is een priemelement zou dan betekenen: $\neg\exists b, c \in \mathbb{Z} : p = \min(b, c)$. Omdat $p = \min(p, p)$, zijn er dus geen priemelementen. Ontbinden in factoren is niet mogelijk.

5. Nauw verbonden met de theorie van het ontbinden in factoren is de definitie van de g.g.d. en het k.g.v. De situatie is ieder bekend, als we de oude definitie van ontbinden hanteren. Maar nu g.g.d. en k.g.v. bij ontbinding volgens de nieuwe definitie.

Ik geef liever geen zwaarwichtig aandoende definities, maar volsta met een voorbeeld.

V is weer de verzameling van de gehele algebraïsche vormen met rationale coëfficiënten. Gevraagd wordt het k.g.v. van

$$6a+6b,\ \tfrac{1}{2}a+5b,\ a^2+ab$$

$6a+6b$ is een priemelement

$\frac{1}{2}a+5b$ is een priemelement

a^2+ab is produkt van de priemelementen a en $a+b$.

In totaal komen we dus tegen de priemelementen

$$6a+6b,\ \tfrac{1}{2}a+5b,\ a \text{ en } a+b$$

Hiervan behoren $6a+6b$ en $a+b$ tot dezelfde priemklasse.

K.g.v. is daarom bijv.

$$a(a+b)(\tfrac{1}{2}a+5b)$$

Maar men kan net zo goed het produkt van een ander drietal priemelementen opgeven die tot dezelfde drie priemklassen behoren als deze drie. Het k.g.v. is dus bepaald op een deler van 1 na.

Analoog is de g.g.d. van

$$6a+6b,\ a^2+ab \text{ en } (\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b)^2$$

bijv. $a+b$. Maar ook dit antwoord is bepaald op een deler van 1 na.

Ontvangen boeken

W. Jochems, *De structurering van leerstof, Onderwijs over de ionentheorie in de derde klas van het VWO.* T.H. Delft, afd. alg. wetenschappen, 1977.

K. de Bruin e.a., *Getal en Ruimte*, deel 2V2, 5de druk, Tjeenk Willink, Noorduyn, Culemborg. 1977, 145 blz., *f* 12,25.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977

Eerste ronde: vrijdag 1 april 1977, 14.00—17.00 uur.

A1. In een vlak liggen twee cirkels met stralen 2 en 3, die elkaar uitwendig raken. (Uitwendig raken betekent: de cirkels raken elkaar zodanig, dat geen middelpunt van een der cirkels binnen de ander ligt). Bepaal de omtrek van de rechthoek met de kleinste oppervlakte die beide cirkels omvat.

A2. De reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ voldoen aan $0 \leqq x_i \leqq 1$ voor $i = 1, 2, \ldots, 12$.
Beschouw de 12 getallen: $x_1, \dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \ldots,$
$\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{12}}{12}$.
Wat is de maximale waarde, die het verschil tussen het grootste en het kleinste van deze getallen kan aannemen?

A3. Bepaal alle paren natuurlijke getallen (m, n) met $0 < n \leqq m$ en $3(m+n) = mn$.

B1. Gegeven zijn 4 punten die niet in één vlak liggen. Hoeveel vlakken zijn er die tot al deze 4 punten dezelfde afstand hebben?

B2. Bepaal het kleinste natuurlijke getal n met de eigenschap, dat als men vóór n en achter n een cijfer 3 plaatst, een getal ontstaat dat gelijk is aan $43n$.

B3. Beschouw de 298 breuken $\frac{1}{299}, \frac{2}{298}, \frac{3}{297}, \ldots, \frac{298}{2}$ waarvan de som van teller en noemer 300 is. Hoeveel van deze breuken zijn te vereenvoudigen?

B4. In één vlak liggen 3 verschillende lijnen l, m en n die door één punt gaan, en elkaar onder een hoek van 60° snijden. P is een punt binnen één van de scherpe hoeken tussen l en m. De afstand van P tot l is a, de afstand van P tot m is b. Bereken de afstand van P tot n.

B5. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x+2}$. n is een positief geheel getal.
Bereken $f\left(0\right) + f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(1\right)$.

C1. Bepaal de oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 &= 6\\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 + x_7 &= 8\\
x_1+x_2+x_3+x_4 + x_6 + x_7 &= -3\\
x_1+x_2+x_3 + x_5 + x_6 + x_7 &= -10\\
x_1+x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 7
\end{aligned}$$

$$x_1 \qquad +x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = \ \ 0$$
$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = -2.$$

C2. Bij elk paar reële getallen (x, y) definieert men een reëel getal $x \otimes y$ zo, dat voor alle reële getallen x, y en z het volgende geldt:
(a) $x \otimes y = y \otimes x$
(b) $(x \otimes y)z = (xz) \otimes (yz)$
(c) $(x \otimes y)+z = (x+z) \otimes (y+z)$.
Bepaal $1976 \otimes 1977$.

C3. In een scherphoekige driehoek ABC is AD de hoogtelijn uit A en BE de hoogtelijn uit B. AD en BE snijden elkaar in een punt H. Er geldt $AH : HD = 3 : 2$ en $BH : HE = 2 : 1$.
Bepaal de tangens van elk van de hoeken van driehoek ABC.

Correctiemodel
Categorie A : 2 punten per opgave
Categorie B : 3 punten per opgave
Categorie C : 4 punten per opgave

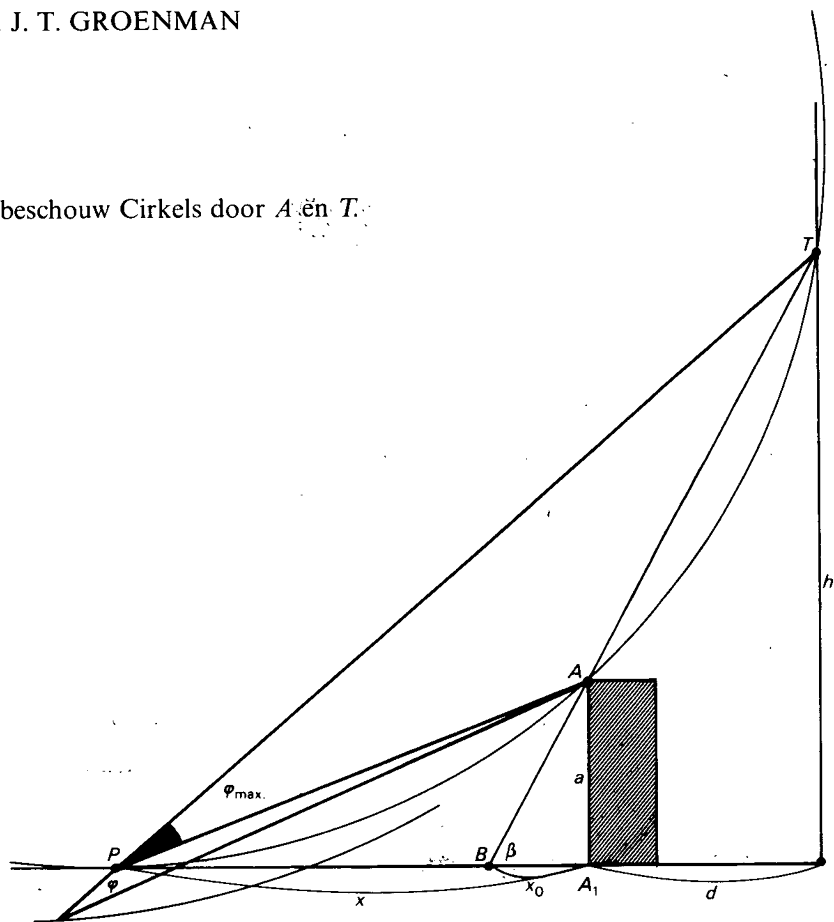
Opgave	*Antwoord*	*Commentaur*
A1	$22+4\sqrt{6}$	Als $\sqrt{24}$ niet herleid is, geen punten aftrekken.
A2	$\frac{11}{12}$	
A3	(6,6) en (12,4)	Voor elk correct paar één punt. Heeft men (4,12) i.p.v. (12,4) dan géén punten aftrekken; als deze beiden paren vermeld worden ook niet; als ten onrechte (0,0) genoemd wordt ook niet.
B1	7	
B2	91	
B3	219	
B4	$a+b$	
B5	$\dfrac{n+1}{2}$	$\frac{1}{2}(n+1)$ en $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ zijn natuurlijk ook goed.
C1	$x_1 = 3$ $x_2 = 1$ $x_3 = -6$ $x_4 = 11$ $x_5 = 4$ $x_6 = -7$ $x_7 = -5$	Ook de notatie $(3,1,-6,11,4,-7,-5)$ wordt natuurlijk goedgekeurd. Heeft men 6 van de 7 waarden goed, dan 3 punten; heeft men 5 van de 7 waarden goed, dan 2 punten. Minder dan 5 waarden goed: géén punten.
C2	$1976\frac{1}{2}$	
C3	$\tan C = \sqrt{2}$ $\tan A = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\tan B = \frac{5}{4}\sqrt{2}$	Voor $\tan C$ 2 punten, voor $\tan A$ en $\tan B$ elk 1 punt. Niet herleide wortelvormen, zoals bijvoorbeeld $\frac{3}{\sqrt{2}}$ worden goed gerekend.

Voor alle overige incorrecte of onvolledige antwoorden worden géén punten toegekend.

Reactie op: 'Een maximum-probleem bij zien en fotograferen' jaargang 52, No. 3, blz. 110

Dr. J. T. GROENMAN

Ik beschouw Cirkels door A en T.



$\varphi_{max} > \varphi$. Wij moeten dus de *rakende* cirkel hebben. $x^2 = BA \cdot BT$.

Wij stellen $x_0 : (x_0 + d) = a : h \rightarrow x_0 = \dfrac{ad}{h-a}$

en $PB^2 = BA \cdot BT = \dfrac{a}{\sin\beta} \cdot \dfrac{h}{\sin\beta} = \dfrac{a^t h^t}{\sin^2\beta}$

zodat $PB = \sqrt{\dfrac{ah}{\sin^2\beta}} = \dfrac{1}{\sin\beta}\sqrt{ah}$ $\quad (\beta = \text{scherp})$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{a}{ad/h-a} = \frac{h-a}{d}\,; \qquad \sin\beta = \frac{h-a}{\sqrt{(h-a)^2+d^2}}$$

$$PB = \sqrt{ah}\left\{\frac{\sqrt{(h-a)^2+d^2}}{(h-a)}\right\} = \sqrt{ah}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{d}{h-a}\right)^2}\right\} = \sqrt{ah\left\{1+\left(\frac{d}{h-a}\right)^2\right\}}$$

$$PA = \frac{ad}{h-a} + \sqrt{ah\left\{1+\left(\frac{d}{h-a}\right)^2\right\}}\,. \quad \text{Voor } d = 0 \text{ wordt dat } \sqrt{ah}.$$

Dat vindt de heer Mulder ook.
Het zal duidelijk zijn dat het eerste vraagstuk meteen $\sqrt{ah}$ geeft.

Een maximum-probleem

Prof. Dr. O. BOTTEMA

In dit tijdschrift heeft *Mulder* onlangs een vraagstuk opgelost dat, ontdaan van zijn aantrekkelijke praktische inkleding, als volgt luidt[1]: in een plat vlak zijn de punten A en B gegeven en een rechte l, loodrecht op AB, die het verlengde van AB snijdt. P is een veranderlijk punt op l. (fig. 1). Voor welk punt P_m op l is $\angle APB$ maximaal? De schrijver lost het op met behulp van differentiaalrekening en geeft daarna een constructie voor P_m.

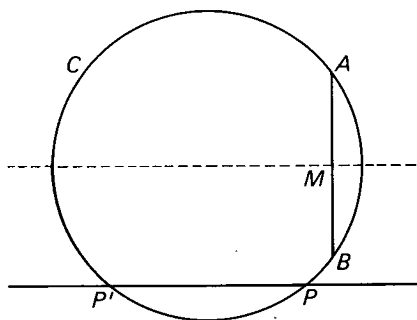


fig. 1.

Een direkte meetkundige oplossing is de volgende. Breng de cirkel c door A en B en het willekeurige punt P op l. Laat P' het tweede snijpunt van l en c zijn. Blijkbaar is $\angle AP'B = \angle APB$; deze omtrekshoek is des te groter naarmate de straal van c kleiner is. De kleinste in aanmerking komende cirkel is die waarvan de straal gelijk is aan de afstand van het midden M van AB tot l; de punten P en P' vallen dan samen. Hieruit volgt dat P_m het raakpunt is van de door A en B gaande en aan l rakende cirkel en dus door een zeer eenvoudige constructie kan worden bepaald. – Deze eigenschap van P_m wordt in het genoemde artikel niet genoemd maar is er wel impliciet in aanwezig. Bij *Mulder* is AB het bovenste deel van een televisiemast en P de standplaats van een fotograaf. Het vraagstuk is in dit tijdschrift al eens eerder aan de orde geweest[2], zij het met een andere inkleding: AB stelde toen een schouwtoneel voor en P een plaats op het zijbalkon. Daarbij werd uitvoerig ingegaan op de geschiedenis van het probleem. Het werd op 4 juli 1471 door *Regio-*

montanus per brief toegezonden aan *Christian Roder* te Erfurt en luidt in vertaling als volgt: „Een tien voet lange staaf is in loodrechte stand opgehangen zó dat het ondereinde zich vier voet boven de grond bevindt. Men vraagt het punt op de grond van waaruit de staaf onder de grootste hoek gezien wordt". De situatie is geheel dezelfde als bij *Mulder*. De oplossing van *Regiomontanus* is verloren gegaan, maar de historicus *Cantor* vermoedt, gezien de van de steller bekende gedachtengangen, dat zij op de door *A* en *B* gaande en aan *l* rakende cirkel zal hebben berust. Met infinitesimaalrekening kon het in de vijftiende eeuw nog niet.

Mulder geeft nog de oplossing, eveneens door berekening, voor het geval dat het uitzicht op de mast door een flatgebouw wordt belemmerd. Maar dat is niet anders dan het oorspronkelijke vraagstuk als men toestaat dat *AB* en *l* een scheve hoek met elkaar maken: *l* is weer de begane grond, *A* de top van de mast en *B* de dakrand van het flatgebouw. Ook hier geeft de door *A* en *B* gaande en aan *l* rakende cirkel de oplossing; uit de nogal ingewikkelde berekening volgt dat nu minder eenvoudig. De gegeneraliseerde opgave is, eveneens in dit tijdschrift, door *Groenman* behandeld [3].

1 *H. M. Mulder*, Een maximum-probleem bij zien en fotograferen, *Euclides 52* (1976–77), 110–113.
2 *O. Bottema*, Over het zijbalkon en over Regiomontanus, Verscheidenheden LI, *Euclides 37* (1961–62), 325–328.
3 *J. T. Groenman*, Bij een 'Verscheidenheid', *Euclides 37* (1961–62), 60–64.

Staatsexamenverslag 1976, H.A.V.O. en V.W.O.

Wiskunde

In de verslagen van voorafgaande jaren leest men herhaaldelijk: 'Het schriftelijk gedeelte van het examen is door de meeste kandidaten onvoldoende gemaakt.' Dit jaar echter moet men vaststellen dat bij hoge uitzondering wel eens een kandidaat het schriftelijk gedeelte van het examen voldoende gemaakt heeft. De resultaten van het mondeling gedeelte van het examen zijn dan ook niet zo rooskleurig.
Enkele opmerkingen:
1. Het differentiëren van eenvoudige functies leverde zelfs moeilijkheden op. Had men de afgeleide functies bepaald, dan wist men geen verband te leggen tussen functie en zijn afgeleide.
2. De formules uit de goniometrie werden slecht gekend.
3. Bij het werken met vectoren in R_2 en in R_3 wist men niet wat men feitelijk aan het doen was.
4. Het onderdeel logaritme was onvoldoende bestudeerd.

De sub-commissie is van mening dat het alleen dan zinvol is wiskunde in het examenpakket op te nemen, als men:
a. goed kennis neemt van de inhoud van het programma;
b. zich grondig voorbereidt op dit onderdeel van het examen.

Wiskunde I

De resultaten van het schriftelijk gedeelte van het examen waren van een zodanig gehalte, dat aan slechts ongeveer 10% van de kandidaten een voldoend cijfer kon worden toegekend.
Dat in deze omstandigheden niet meer gesproken kan worden van lacunes in de kennis van velen, die zich aan het examen menen te moeten onderwerpen, maar veeleer van een totaal gemis aan kennis, is vanzelfsprekend. Toch valt er nog wel enig verschil te constateren in de resultaten ten aanzien van de verschillende vraagstukken. Zo valt het met name op, dat velen zich, zoals overigens ook de afgelopen jaren het geval was, zelfs niet wagen aan het vraagstuk, dat een differentiaalvergelijking tot onderwerp had. Aan de bestudering van dit onderwerp blijken elk jaar opnieuw velen niet toegekomen te zijn. Ook het laatste vraagstuk, dat een relatief groot gedeelte van de kandidaten prefereerde, – het vraag-

stuk over waarschijnlijkheidsrekening, – gaf aanleiding tot onoverkomelijke moeilijkheden.
De bange vermoedens, die de examinatoren koesterden na het corrigeren van het schriftelijk werk, bleken veelal nog overtroffen te worden door de werkelijkheid. Er bleken dit keer zelfs kandidaten te zijn, die tijdens het mondeling examen niet in staat waren, één van de eenvoudigste vierkantsvergelijkingen op te lossen. De zulken moeten niet verwonderd zijn, als hun kennis met het cijfer één wordt gehonoreerd. Het grote aantal onvoldoende cijfers, dat moest worden toegekend, mag dan ook niet verweten worden aan de examinatoren, die te zware eisen zouden stellen, maar is uitsluitend het gevolg van de omstandigheid, dat te velen zich aan het examen onderwerpen zonder enig inzicht te hebben in de eisen die gesteld worden bij een examen, dat iemand, althans bij een gunstig resultaat, het recht geeft tot een universitaire studie.
Het opsommen van veel voorkomende fouten heeft nauwelijks enige zin. Daarom moge volstaan worden met het dringende advies aan toekomstige kandidaten, zich terdege op de hoogte te stellen van de examen-eisen en zich vervolgens grondig voor te bereiden op het examen.
Alleen als men dit doet, heeft men reden een gunstig resultaat te verwachten.

Wiskunde II

De vraagstukken, die aan de kandidaten op het schriftelijk examen werden voorgelegd leverden voor velen van hen schier onoverkomelijke problemen op. Slechts 7,1% van de kandidaten, die aan het schriftelijk examen deelnamen, behaalde een voldoende cijfer hiervoor. Het negatieve beeld van de afgelopen jaren wordt steeds treuriger.
Bij het mondelinge examen kwam de waarheid over de kennis der kandidaten nog schrijnender naar voren. De kennis van elementaire begrippen uit de meetkunde liet zeer veel te wensen over. Zelfs het goed kunnen reproduceren van een definitie was een zeldzaamheid. Inzicht in de meetkunde behoorde slechts bij zeer weinig kandidaten tot hun geestelijke bagage.
De commissie heeft in het verleden reeds opgemerkt dat zij er vanuit gaat dat *elke* kandidaat van zijn keuze-onderwerp tenminste een aantal elementaire begrippen en eigenschappen kent en kan hanteren. Van de kandidaten, die op het mondeling examen verschenen had zelfs 9,9% geen keuze-onderwerp bestudeerd.
Te oordelen naar de ten toon gespreide kennis en vaardigheden met betrekking tot zowel de meetkunde als het keuze-onderwerp, krijgt de commissie het onaangename gevoel de verslagen van de afgelopen jaren alleen voor eigen plezier te hebben geschreven.
De commissie heeft het sterke vermoeden dat door het overgrote deel der kandidaten het vak Wiskunde II slechts gekozen wordt om het vakkenpakket compleet te maken.

Boekbespreking

SMP Further Mathematics Series IV. *Extensions of Calculus* (Draft edition), Cambridge University Press 1971, XI + 168 blz., £ 1.80.

In dit boek vier onderwerpen.
1. Het complexe getallenvlak
De stelling van De Moivre wordt bewezen, eerst voor gehele, daarna voor rationale exponenten, en de vergelijking $z^n = 1$ opgelost.
Hierop volgen complexe functies en het verband, in het complexe vlak, tussen origineel en beeldpunt. Bijv.: laat bij de functie $z \rightarrow \frac{1}{z}$ het origineel de cirkel $|z-k| = k$ doorlopen en vind de verzameling van de beeldpunten. Deze blijkt een rechte lijn te zijn.
De definitie $e^{x+yj} = e^x(\sin y + j \cos y)$ wordt plausibel gemaakt en daarna de functie $z \rightarrow e^z$ uitvoerig besproken.
Sommige geometrische problemen blijken met behulp van complexe functies op elegante wijze oplosbaar te zijn, zoals de inversie en de cirkel van Apollonius. Bij het laatste probleem wordt uitgegaan van de vergelijking $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} = k$, waarin $k \in \mathbb{R}^+$.
2. Hyperbolische functies en circulaire functies
De inversen van sin, sinh en cosh blijken nuttig bij het vinden van sommige primitieven. Het mechanische probleem van de vrijhangende flexibele draad leidt tot de kettinglijn; ook hierbij spelen hyperbolische functies een rol.
De circulaire functies treden op bij het vinden van de matrices voor isometrieën en bij de Lorentz transformatie.
3. Functies en hun afgeleiden
De functies in dit hoofdstuk zijn aanvankelijk complexe functies. Eerst wordt continuïteit van een complexe functie gedefinieerd. Dan volgt een onderzoek over differentieerbaarheid. Voorwaarde voor differentieerbaarheid is, dat de afbeelding conform is, d.w.z. dat lokaal de vorm bij de afbeelding bewaard blijft. Anders gezegd: lokaal is de afbeelding een spiral similarity.
Vervolgens functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$, waarvan het beeld een kromme in het complexe vlak is. Weer volgt een aardige geometrische toepassing: de cycloïde met de afleiding van de lengte van één boog.
We gaan terug naar reële functies en wel afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}$.
Deze afbeeldingen geven aanleiding tot het definiëren van partiële afgeleiden. Wanneer is een functie van twee variabelen differentieerbaar?
Via analogie met de functies van één variabele komen we tot de eis van differentieerbaarheid:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + E$$

waarin

$$\lim_{(h,k)\rightarrow(0,0)} \frac{|E|}{\sqrt{(h^2+k^2)}} = 0$$

Meetkundig komt dit erop neer, dat de grafische voorstelling van de functie een raakvlak heeft in het punt $(a, b, f(a, b))$.
Dan nog functies van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ en de rol die de matrix van Jacobi bij deze afbeeldingen speelt.
Tot slot wordt verband gelegd met hoofdstuk 1. Nu blijkt de differentieerbaarheid van de functie

$$f: x+yj \rightarrow u+vj$$

gelijkwaardig te zijn met

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \wedge \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

4 Multipele integralen
Dit hoofdstuk is in hoofdzaak technisch. Met toepassingen op het berekenen van oppervlakten

en inhouden, zwaartepuntsbepaling en op waarschijnlijkheidsrekening.
Een fraai boek, vooral de hoofdstukken 1 en 3. De auteurs glijden op gemakkelijke, heldere en goed leesbare manier door de stof heen. Velen van ons zullen dit boek graag lezen.

P. G. J. Vredenduin

J. T. Oden and J. N. Reddy, *An introduction to the theory of finite elements* (Wiley-Interscience Series), John Wiley and Sons, New York-London, XII+429 bl., £ 17.50.

Dit boek behandelt op uitvoerige wijze de methode van de eindige elementen, een methode om benaderde oplossingen aan te geven van randwaardeproblemen (partiële differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden). De methode werd in de jaren na 1950 ontwikkeld om bepaalde problemen in de technische wetenschappen (engineering science) benaderd op te lossen en pas na 1968 is er meer aandacht besteed aan een exacte wiskundige opbouw, waaraan de eerstegenoemde der auteurs van dit boek mede een actief aandeel had. De methode berust op verdeling van het gebied in $\mathbb{R}^n$, waar de oplossing gezocht wordt, in deelgebieden. In de deelgebieden worden benaderde oplossingen aangegeven zodanig dat die, aan elkaar gepast, een benaderde oplossing voor het gebied vormen. Zoals in het voorwoord opgemerkt wordt, is dit 'a natural idea to the structural engineer'.
Het eerste deel van het boek (vijf hoofdstukken) is gewijd aan de wiskundige grondslagen. Hierin wordt de lezer niet gespaard. In kort bestek wordt hij ingewijd in de theorie van de distributies, distributieoplossingen van differentiaalvergelijkingen, Fouriertransformaties, L_p-ruimten en ruimten van Sobolev, Hilbertruimten en elliptische differentiaaloperatoren. In het tweede deel (dat op bl. 197 begint en de hoofdstukken 6–9 bevat) komt dan de methode der eindige elementen aan de beurt. In hoofdstuk 6 vindt men een algemene inleiding met voorbeelden en illustraties. Hoofdstuk 7 is weer zuiver wiskundig (existentiestellingen), de hoofdstukken 8 en 9 bevatten de toepassing op randwaardeproblemen.
De auteurs komen uit de hoek van de toegepaste mechanica. Met alle eerbied voor hun kennis van de moderne analyse schijnt het mij toch toe dat men op verscheidene plaatsen in het boek kan zien dat het niet geschreven is door 'van huis uit professionele wiskundigen'. Om een voorbeeld te noemen: ik geloof niet dat paragraaf 6.2 (de definitie van een finite-element model van een gebied in $\mathbb{R}^n$) door een wiskundige geschreven zou zijn zoals hier gebeurd is, al wordt aan de hand van voorbeelden wel duidelijk gemaakt wat bedoeld is. Ieder hoofdstuk bevat literatuurverwijzingen. Het boek is fraai van uitvoering.

A. C. Zaanen.

D. Marsal, *Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen*. Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1976, 574 blz.

Dit uitgebreide leerboek geeft een overzicht van moderne numerieke technieken voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen, die optreden in onderdelen van de Natuurkunde en de Technische Wetenschappen. Zowel tijdsonafhankelijke randwaarde-problemen als tijds-afhankelijke begin(-rand)waarde-problemen komen aan de orde.
De volgende numerieke methoden worden behandeld:

a. Differentie methoden,
b. Eindige elementen methoden,
c. Directe en iteratieve methoden ter oplossing van de grote stelsels vergelijkingen, die optreden bij toepassing van de onder a en b genoemde technieken.

Het boek richt zich vooral tot de toekomstige gebruiker van numerieke methoden. Er is géén uitgebreide voorkennis betreffende analyse of lineaire algebra nodig om dit boek te kunnen lezen. Er wordt zelfs uitgelegd wat partiële afgeleiden en meervoudige integralen zijn.
In dit boek zijn veel voorbeelden te vinden van concrete problemen en bijbehorende oplossingstechnieken. Voor sommige van deze technieken zijn Fortran programma's opgenomen. Gezien de omvang van het werk en de beoogde lezerskring is het te begrijpen dat de schrijver heeft afgezien van een streng wiskundige analyse van de behandelde numerieke procédé's.

M. N. Spijker

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Onlangs kreeg ik toegezonden: Hans Rademacher and Otto Toeplitz, The Enjoyment of Mathematics, Selections of Mathematics for the Amateur, vertaald uit het Duits, oorspronkelijke titel Von Zahlen und Figuren. Uitgegeven door de Princeton University Press, prijs $2.95. Omvang 205 blz.
Het boek vereist geen andere voorkennis dan de elementaire algebra en planimetrie uit het voortgezet onderwijs. Het is zeer gemakkelijk leesbaar. Een kostelijk boekje voor wie in zijn vrije tijd eens op een gemakkelijke manier van wiskunde wil genieten.
Het boek bestaat uit 28 korte hoofdstukken. Verschillende vele bekende problemen komen aan de orde, maar ook onderwerpen die voor de meesten van ons nieuw of deels nieuw zijn.
Meestal worden de problemen eerst gesteld en kan men desgewenst zelf gaan proberen, voordat men verder leest. Aardig is bijv. het probleem na te gaan hoe groot het aantal repeterende decimalen kan zijn van een breuk met gegeven noemer. Het aantal repeterende decimalen van $\frac{1}{41}$ kan 40 zijn. Maar wat is a priori nog meer mogelijk? Wie wil weten welk aantal gerealiseerd wordt, moet gaan rekenen. En hoe zit het met $\frac{1}{63}$. Men heeft de neiging spontaan 62 te zeggen. Maar die neiging kan men beter onderdrukken. Wat dan wel?
Op hoeveel manieren kan men 3 rode, 4 witte en 5 groene knikkers verdelen over drie vazen, als in de eerste vaas 2, in de tweede 6 en in de derde 4 knikkers gedaan moeten worden?
Het is maar een greep uit de inhoud. Wie de antwoorden op de problemen wenst, moet het boek maar aanschaffen. Hieronder volgen nog twee opgaven uit het boek, waarvan de antwoorden wel gegeven zullen worden.

370. Zijn er 1000 opvolgende natuurlijke getallen die geen van alle priem zijn?

371. Gegeven een gesloten kromme die ineens doorlopen kan worden. De kromme mag zichzelf wel snijden. Bij het doorlopen van de gehele kromme passeert men elk snijpunt slechts twee keer. Hieronder is een voorbeeld getekend.

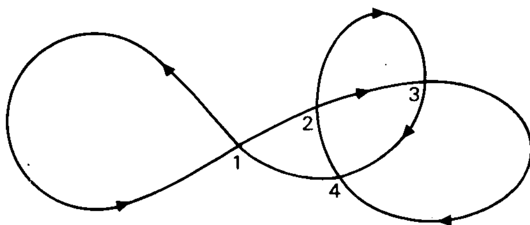
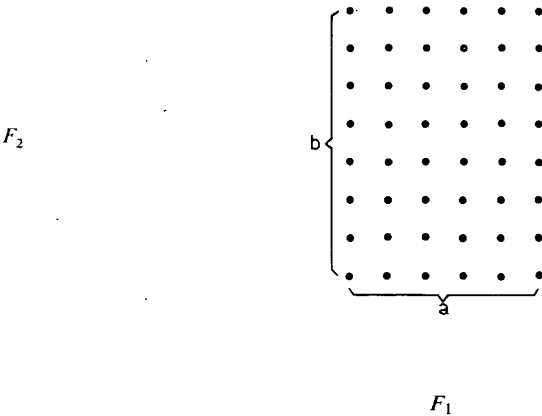


Fig. 1.

Bij het doorlopen van de kromme mag men niet in een snijpunt plotseling van richting veranderen.
Men komt achtereenvolgens bij de snijpunten
1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 1.
In deze serie staat het getal 1 op de 1e en 8e plaats,
2 op de 2e en 5e plaats,
3 op de 3e en 6e plaats,
4 op de 4e en 7e plaats.
Elk getal staat dus op een even en op een oneven plaats. Dit is geen toeval. Hoe men de kromme ook tekent, dit is steeds voor alle snijpunten het geval. Bewijs.

Oplossingen
Voor de opgaven zie het vorige nummer.

368. *ab* personen, waarvan er geen twee dezelfde lengte hebben, stellen zich op in een rechthoek. Fotograaf F_1 neemt een foto en eist dat men zich zo opstelt, dat ieder korter is dan zijn achterbuurman. Op hoeveel manieren kunnen ze zich opstellen?

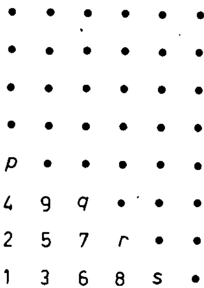


F_1

Kies b personen uit de ab personen. Dit kan op $\binom{ab}{b}$ manieren. Rangschik ze naar grootte en zet ze in de eerste kolom. Kies uit de resterende $(a-1)b$ personen weer b personen, rangschik ze naar grootte en zet ze in de tweede kolom. Ga zo door. Ten slotte kunnen de kolommen nog op $a!$ manieren gepermuteerd worden. Het totaal aantal rangschikkingen wordt dus

$$a!\binom{ab}{b}\binom{(a-1)b}{b}\cdots\binom{1b}{b}$$

De fotograaf F_2 wil ook een foto nemen en stelt een analoge eis als de fotograaf F_1. We gaan de personen opstellen zo, dat aan beide eisen voldaan is. We noemen de kortste persoon 1, de daarop volgende 2, enz. We zetten in elk geval 1 links onder. Daarna geven we 2 een plaats, vervolgens 3, enz. Neem bijv. $a = 6$ en $b = 8$. Onderstel dat we de eerste 9 personen een plaats hebben gegeven, zoals in onderstaande figuur is aangegeven.



We willen nu 10 een plaats geven. We kunnen hem zetten op de plaatsen gemerkt met p, q, r, s. Aan de opstelling van de 9 personen kennen we een getal toe, nl. 332100, omdat de kolommen van links naar rechts resp. bezet zijn door 3, 3, 2, 1, 0, 0 personen. Door persoon 10 te zetten op plaats p, q, r resp. s krijgen we een bezetting waaraan toegekend is het getal 432100, 333100, 332200, 332110. Ons probleem is nu teruggebracht tot het volgende:

Begin met 000000 en eindig met 888888. Verhoog telkens één van de cijfers met 1 zo, dat de cijferrij nergens stijgend blijft. Gevraagd het aantal wegen dat 000000 met 888888 verbindt.
Ter inleiding nu eerst het geval $a = 2$, $b = 6$. Aan elk getal $\overline{xy}$ voegen we het punt (x, y) toe. We moeten dan het aantal wegen tellen waarlangs we van (0, 0) het punt (8, 8) kunnen bereiken door telkens naar rechts of naar boven te gaan. Hieronder zijn in plaats van de punten meteen de getallen geplaatst die aangeven op hoeveel manieren het punt bereikbaar is. Elk getal is, op het initiaalgetal na, de som van de getallen er direct onder en direct links ervan, voorzover deze er zijn.

						132
					42	132
				14	42	90
			5	14	28	48
		2	5	9	14	20
	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1

Blijkbaar zijn er 132 wegen mogelijk en dus 132 rangschikkingen van de personen.
Nu $a = 3$, $b = 6$. We volgen dezelfde methode, maar werken nu in 3 dimensies. We krijgen dan 7 lagen boven elkaar, die we echter na elkaar tekenen. Elke volgende laag schuift t.o.v. de eronder gelegen één plaats naar boven; de bovenste punten liggen dus boven elkaar. Elk getal is gelijk aan de som van de direct eronder, er links van en ervoor gelegen getallen (ervoor betekent nu, wat tweedimensionaal eronder genoemd werd). De onderste laag hebben we reeds. De lagen erboven worden resp.

					1122
				282	990
			70	240	576
		17	56	128	246
	4	12	25	44	70
1	2	3	4	5	6

				4972
			984	3850
		180	702	1876
	29	110	282	598
4	12	25	44	70

			14828
		2258	9856
	290	1274	3748
29	110	282	598

		31964
	3532	17136
290	1274	3748

	59100
3532	17136

En ten slotte prijkt in de bovenste laag alleen het eindgetal 59100. Dit is het gevraagde aantal rangschikkingen.
Dit procédé laat zich generaliseren, waarbij de visuele voorstelling natuurlijk niet meer mogelijk is.

369. De trui met etiket aan de achter-binnenkant, die over het hoofd werd uitgetrokken en daarna met linkerarm in rechtermouw weer werd aangetrokken, had daarna het etiket aan de achterbuitenkant. Probeer maar.

Mededelingen

Contributie 1977 - 1978

De Algemene Ledenvergadering van 30 oktober 1976 heeft de contributie voor het komende verenigingsjaar als volgt vastgesteld:
gewone leden *f* 35,— inclusief Euclides; gewone leden, die Euclides niet via de vereniging ontvangen *f* 15,—; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de VVWL *f* 21,—. Nederlandse leden ontvangen een accept-girokaart. Belgische leden wordt verzocht de contributie over te maken op giro 143917 ten name van Ned. Ver. van Wiskundeleraren te Amsterdam. Wie reeds lid is behoeft zich niet opnieuw op te geven.
De penningmeester.

Een nieuw schooljaar, nieuwe activiteiten

Dat geldt ook voor de regionale werkgroepen. 'Steeds meer leerlingen kiezen wiskunde', 'het gehalte van de leerlingen wordt steeds minder', zijn kreten die ook dit jaar weer alom te horen zullen zijn. Niveauverlaging is onaanvaardbaar. Het enige antwoord zal moeten bestaan uit het aanscherpen van de didaktiek. Vandaar dat het regionaal bij elkaar komen van wiskundeleraren broodnodig is. Je kunt ontzaglijk veel van elkaar opsteken. Het aanhoren van elkaars problemen en het gezamenlijk zoeken van oplossingen daarvoor, ervaart iedereen als een ruggesteun. Er gaat een enorme stimulans voor je eigen lessen uit van het praten over de specifieke vakproblemen met collega's. Het kost wat energie, je moet er wat voor over hebben, maar het schenkt je meer bevrediging in het dagelijks werk.
Hieronder volgen de plannen van de werkgroepen *Zeeland* en *Alkmaar*. In de komende nummers van Euclides hopen we de plannen van andere werkgroepen op te nemen. Als u vindt dat in uw regio een werkgroep opgericht moet worden, verzamel dan een paar collega's, maak een afspraak voor de eerste bijeenkomst en neem dan contact op met mij. We kunnen dan collega's van scholen in de omgeving convoceren voor die bijeenkomst. In Euclides 52e jaargang nr. 4 vindt u al wat informatie voor het opzetten van een werkgroep.

De werkgroep te Goes is op donderdag 8 september om 16.00 uur in het Chr. Lyceum voor de eerste keer in het nieuwe cursusjaar bij elkaar geweest.
Aan de orde werd gesteld.
a. Bespreking van 'ons werkstuk': de multiple choice toets voor klas twee havo en vwo.
b. Voorbereiding voor de volgende vergadering die gehouden wordt op donderdag 6 oktober om 16.00 uur in het Goese Lyceum. Dan zullen we de goniometrie doornemen. Er zit voor iedereen wat plezierig huiswerk in.
Nieuwe deelnemers zijn van harte welkom.

De regionale werkgroep Alkmaar (zie ook Euclides 52e jrg. nr. 9) heeft als motto voor de bijeenkomsten van de komende cursus gekozen: 'Zo doe ik het'. Om de beurt houdt iemand een inleiding over een welomschreven onderwerp, waarbij hij zeer gedetailleerd bespreekt hoe hij dat onderwerp behandelt in de klas. Aansluitend discussie.
Als onderwerpen zijn genoemd:
— het begin van de kansrekening (voor de eerste bijeenkomst) —
— de invoering van de negatieve getallen —
— de distributieve eigenschap en de merkwaardige produkten —
— machtsverheffen —
De eerste bijeenkomst is woensdag 28 september a.s. van 16.15 tot ca. 19.30 uur. Plaats: Christelijke Scholengemeenschap Jan Arentz, Fabritiusstraat 2, Alkmaar.
Deelnemers gelieven zich minstens één dag van te voren (i.v.m. de maaltijd: brood en soep;

kosten ƒ 5,50) op te geven bij dhr. A. Meerman, Weissenbruchtsraat 11, Alkmaar.

L. Bozuwa,
Abeelstraat 7,
Dordrecht, 078-63946.

Oproep aan de lezer

Binnenkort verschijnt een speciaal nummer van Euclides, gewijd aan de eindexamens 1977. Wilt u uw eventuele reactie(s) op deze examens sturen naar D. P. M. Krins, Mekongdreef 7, Utrecht?

Jaarvergadering met thema: handelen om te begrijpen

1. In afwachting van een definitieve agenda wordt de leden nu alvast bekend gemaakt, dat de jaarvergadering gehouden zal worden op *zaterdag 29 oktober 1977* in het gebouw van de SOL (Stichting Opleiding Leraren), Archimedeslaan 16, Universiteitscentrum De Uithof, Utrecht, van 10—17 uur.
2. Zij die aan de lunch deel willen nemen wordt verzocht uiterlijk 15 oktober a.s. ƒ 6,75 over te maken op giro 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam, onder vermelding: Lunch. De organisatoren verzoeken dringend niet te speculeren op de aanwezigheid van overschietende lunches, doch tijdig te gireren. (De SOL is ver verwijderd van eethuizen.)
3. In overeenstemming met het thema van de dag zal veel gelegenheid zijn voor eigen werk. Prof. Richard R. Skemp zal een lezing houden en in gespreksgroepen zal gesproken worden over mogelijkheden de opgedane informatie en ervaringen samen met collega's van de eigen school in de praktijk te gebruiken.
4. Professor Skemp zal zijn lezing in het Engels houden, maar hij spreekt van nature al langzaam en erg duidelijk. Hij zal zeker rekening houden met taalproblemen bij sommigen uit zijn gehoor. Het is de bedoeling bovendien vooraf een korte nederlandse samenvatting van zijn lezing op stencil uit te delen. Prof. Skemp is schrijver van de Aula-pocket: Wiskundig denken.
5. Er wordt getracht de leden voor de jaarvergadering een publicatie onder dezelfde titel als het thema van de dag toe te zenden. Men kan zich dan al wat oriënteren op de inhoud van het thema.
6. De SOL is per auto gemakkelijk te bereiken: ANWB-borden geven de richting naar DE UITHOF. Het gebouw is gemakkelijk te herkennen doordat het opgebouwd lijkt uit blokken, die trapsgewijs gestapeld zijn. Achter het gebouw is ruime parkeergelegenheid. Ingangen achter C of D, of ingang aan de voorzijde.
Op zaterdagen rijdt van het station Utrecht Centraal lijn 62 via De Uithof naar Zeist. Vertrek 20 en 50 minuten na het hele uur. Uitstappen halte Leuvenlaan.

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

Prof. Dr. O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 2, Delft.

Drs. W. P. van den Brink, Italiaanse Zeedijk 120, Hoorn.

Fred Goffree, Bremlaan 16, Den Dolder.

Dr. J. T. Groenman, Goeman Borgesiuslaan 8, Groningen.

R. Leentfaar: 't Weerom 5, Barendrecht.

Drs. M. S. R. Nihom, Stevinstraat 241, 's-Gravenhage.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.